

**Exercice 1**

Calculer le rang des matrices suivantes. Noyau et Images de  $C$  et  $D$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  ayant pour matrice, dans la base canonique,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau, le rang et l'image de  $f$ . Construire  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  une base du noyau, complétée en une base de l'image puis en une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner la matrice  $M'$  de  $f$  dans cette base, et la matrice de passage.

**Exercice 3 (exemple de décomposition LU — PT 2006 A)**

On considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer l'inverse de  $L$ .
- 2) Déterminer une matrice  $U$  triangulaire supérieure telle que  $A = LU$ . En déduire  $A^{-1}$ .

La décomposition  $LU$  permet de calculer rapidement l'inverse d'une matrice  $A$ , dans le but par exemple de résoudre un système du type  $Ax = b$ .

**Exercice 4**

Soit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille  $n$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées antisymétriques ( ${}^tM = -M$ ) de taille  $n$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  sont des sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On précisera leur dimension.
- 2) Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

**Exercice 5**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  fixés. Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = -M + \text{Tr}(M)A$ .

- 1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
- 2) On suppose que  $\text{Tr}(A) \neq 1$ , montrer que  $f$  est bijective.
- 3) On suppose désormais que  $\text{Tr}(A) = 1$ , déterminer  $\text{Ker } f$ . Montrer que  $\text{Im } f = \{M \mid \text{Tr } M = 0\}$ .
- 4) Résoudre  $f(X) = B$ .

**Exercice 6**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $u_A$  défini par  $u_A(M) = MA$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- 1) Montrer que  $u_A$  est un endomorphisme. Noyau et image de  $u_A$ .
- 2) Déterminer la matrice de  $u_A$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 3) Écrire la matrice de  $u_A : M \mapsto MA$  lorsque  $A$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 4) Dans le cas où  $A$  est quelconque, montrer que  $u_A$  laisse stable  $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$  et  $\text{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$ .

**Exercice 7 (difficile)**

- 1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $i$ ,  $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ . Montrer que  $A$  est inversible.

- 2) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $i$ ,  $\sum_j |a_{i,j}| < 1$ . Montrer que l'équation  $X = AX + B$ , où  $B \in \mathbb{C}^n$  est fixé, admet une solution unique.
- 3) Soit  $P$  une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant  $\forall i \sum_j p_{i,j} = 1$ . Montrer que  $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\} = 1$  et que ce sup est atteint. Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.