Exercices : Groupes Anneaux Corps

Exercice 1
Montrer que $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un morphisme de groupe. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales (vérifiant ${}^tMM = I_n$). Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ muni du produit matriciel est un groupe.

Exercice 3
Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $\tau \in G$ fixé, définissons l'application φ de G dans G

$$\varphi : g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

1) Montrer que φ est un morphisme de groupes.

2) Montrer que φ est bijectif.

3) Soit E un ensemble. Dans cette question, on suppose que G est le groupe des bijections de E dans E, muni de la composition (donc $\varphi(g) = \tau \circ g \circ \tau^{-1}$).
Le point $x \in E$ est un point fixe d'une application $g : E \to E$ si $g(x) = x$.
- **a)** Montrer que $x \in E$ fixe par g si et seulement si $\tau(x)$ fixe par $\varphi(g)$.
- **b)** Si $F \subset E$ est l'ensemble des points fixes de g montrer que $\tau(F)$ est l'ensemble des points fixes de $\varphi(g)$.

4) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $G = GL(E)$, l'ensemble des applications linéaires inversibles. Soit $v \in G$ et $\varphi : u \mapsto v \circ u \circ v^{-1}$, définie pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.
- **a)** Montrer que $\text{Ker } \varphi(u) = v(\text{Ker } u)$ puis que $\text{Ker } \varphi(u - \lambda \,\text{id}\,) = v(\text{Ker}\,(u - \lambda \,\text{id}\,))$.
- **b)** Montrer que $\text{Im } \varphi(u) = v(\text{Im } u)$.

Exercice 4
Montrer que les ensembles suivants sont des anneaux :

1) L'ensemble $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, muni de la somme et du produit des fonctions.

2) L'ensemble E des suites réelles convergentes, l'ensemble E_0 des suites réelles de limite nulle.

Exercice 5
On note $\mathscr{A}$ l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est un anneau commutatif.

Exercice 6

1) Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible.
Rappel : un élément nilpotent est tel que $\exists k \in \mathbb{N}\ x^k = 0_A$

2) En minimisant les calculs, montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$$

avec $A^0 = I_n$ par convention. Soit $\varphi_A : \mathbb{R}[X] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A(P) = P(A)$

1) Écrire $\varphi_A(1)$, $\varphi_A(X + 1)$. Montrer que φ_A est un morphisme d'anneau.

2) Montrer que φ est un morphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Peut-il être injectif ?