Exercices : Courbes

Exercice 1
Parmi les ensembles suivants, préciser (sans preuve) lesquels sont des ouverts et lesquels sont des fermés.

1) $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| \geqslant 2\}$
2) $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| > 5/3\}$
3) F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$
4) $]0,1[$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\}$
6) $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ et $\mathbb{R}^2-(\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Précisez aussi lesquels sont bornés.

Exercice 2 (Cantor)
Soit $C_0=[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1}=\dfrac{C_n}{3} \cup \left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{C_n}{3}\right)$.

1) Expliciter C_1, C_2. Pour $n \in \mathbb{N}$, C_n est-il fermé ? ouvert ?
2) Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor $K_3=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$?
3) Montrer que $K_3=\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \{0,2\}\right\}$.

Exercice 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f,g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\varphi=\det(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer φ'.

Exercice 4
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$ et que $f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$ (l'accélération est colinéaire à $f(t)=\overrightarrow{OM(t)}$).

1) Calculer la dérivée de la fonction $f \wedge \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.
2) On suppose que $f'(0)$ n'est pas colinéaire à $f(0)$. Montrer que la courbe représentative de f est contenue dans un plan que l'on précisera.
3) Que se passe-t-il si la vitesse initiale $f'(0)$ est colinéaire à $f(0)$?

Exercice 5 (PT B 2010 partie C / E3A PSI 2011 — Strophoïde droite)
Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont

$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y(t)=\frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1) Étude et tracé de Γ.
  a) Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t.
  b) Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
  c) Dresser le tableau des variations des fonctions x et y. Préciser les asymptotes éventuelles.
  d) Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
  e) Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera (c'est-à-dire un point du plan correspondant à deux valeurs du paramètre t). Préciser l'angle entre les tangentes au point double.
  f) Tracer Γ.
2) Former une équation cartésienne de Γ. (Indication : *On pourra utiliser 1)a).*)
3) On considère la droite Δ d'équation $ux+vy+w=0$.
  a) Montrer que le point $M \in \Gamma$ de paramètre t appartient à Δ si et seulement si

$$vt^3+(u-w)t^2-vt-(u+w)=0$$

  b) En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad vt^3+(u-w)t^2-vt-(u+w)=v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

  donner la valeur de $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1$.

On admet que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4) Soit le point $A(1,0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.

a) Donner le paramètre du point A et la relation que vérifient t_1 et t_2.

b) Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?

c) Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox.

5) Soit S un point de paramètre t_0.

a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?

b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?

c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Exercice 6

Soit Γ la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= 3t^2 \\ y &= 2t^3 \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1) Étude et tracé de Γ (cf. plan du cours).

2) Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe.

Exercice 7 (Astroïde)

Soit Γ la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Étude et tracé de Γ.

Exercice 8 (D'après E3A PC 2012 — Deltoïde)

Soit Γ la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1) Réduire le domaine d'étude (en précisant les transformations). On note Γ_1 la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$.

2) Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points singuliers, pour $t = 0$ et $t = t_0$ que l'on déterminera. On note I le point de paramètre t_0.

Donner l'allure de la courbe au voisinage des points O et I (équation des tangentes, position relative de la courbe et des tangentes). On note T la tangente au point I.

3) Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3,0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

a) Vérifier que la droite T passe par Ω. Déterminer $\Gamma \cap \mathscr{C}_1$.

b) Soit J le point de Γ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que Γ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

4) Tracer les courbes Γ, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et T.

5) Montrer que la courbe Γ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angles $\dfrac{2\pi}{3}$.

Indication : *on utilisera des affixes complexes.*

6) Calculer la longueur de Γ.

Exercice 9

Étudier les courbes suivantes :

1) $\begin{cases} x &= t + \dfrac{1}{t} \\ y &= t + \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x &= (t-1)^3 e^{-t} \\ y &= t(t-1)^2 e^{-t} \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x &= \ln(t) - t \\ y &= \operatorname{Arctan}(t-1) + \dfrac{t^2}{2} - 2t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x &= \dfrac{1}{t^2-1} \\ y &= \dfrac{1}{(t-1)(t-2)} \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x &= (\sin t)(1 + 2\cos^2 t) \\ y &= (\cos t)(1 + 2\sin^2 t) \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x &= \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y &= \dfrac{t-2}{(t-1)^2} \end{cases}$

Exercice 10
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x &= t^2+\dfrac{a}{t} \\ y &= (t+1)^2+\dfrac{b}{t} \end{cases}$.

1) Soit u fixé. Déterminer a et b tels qu'en $t=u$, $\mathscr{C}$ ait un point de rebroussement.

2) Déterminer, lorsque u parcourt $\mathbb{R}$, le lieu de ce rebroussement.

3) Tracer $\mathscr{C}$ pour $u=1$.

Exercice 11 (Courbe de la Crêpe)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x &= a\sin t \\ y &= a\cos t \\ z &= b\sin 2t \end{cases}$, avec $a,b\in\mathbb{R}^*$. Montrer que $\mathscr{C}$ est tracée sur le cylindre $x^2+y^2=a^2$. Équation paramétrique des tangentes en $t=-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 12
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x &= a\left(t-\dfrac{t^3}{3}\right) \\ y &= at^2 \\ z &= a\left(t+\dfrac{t^3}{3}\right) \end{cases}$ On appelle *hélice* une courbe dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec une direction donnée. Montrer que la tangente fait un angle fixe avec (Oz). Nature de $\mathscr{C}$. Équation du plan osculateur en $M(t)$.

Exercice 13 (Cycloïde)
Soit Γ la courbe représentant la trajectoire d'un point fixé à un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses.

1) En utilisant des affixes complexes, montrer que Γ a pour représentation paramétrique

$$x(t)=r(t-\sin t) \qquad \text{et} \qquad y(t)=r(1-\cos t) \qquad t\in\mathbb{R}$$

2) On suppose désormais $r=1$. Construire Γ.

3) Expliciter une abscisse curviligne sur Γ. Calculer la longueur totale d'une arche de Γ.

4) Pour $t\in\mathbb{R}$ hors d'un point de rebroussement, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t.

5) Construire la développée de Γ. En déduire une développante.

Exercice 14
Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique

$$x(t)=t+\sin t-4\sin\frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad y(t)=3+\cos t-4\cos\frac{t}{2} \qquad t\in[0,4\pi]$$

1) Construire Γ.

2) Expliciter une abscisse curviligne sur Γ. Calculer la longueur totale de Γ.

3) Pour $t\in]0,4\pi[$, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t.

4) Construire la développée de Γ.

Exercice 15 (D'après écrit PT — Chaînette)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $y=\mathrm{ch}\,(x)$.

1) Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse α de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

3) Soit A_1 et A_2 deux points de $\mathscr{C}$, d'abscisses respectives α_1 et α_2, tels que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points soient orthogonales.

Si on note R_1 et R_2 les rayons de courbures aux points A_1 et A_2, calculer $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$.

4) Déterminer les développantes de $\mathscr{C}$ puis tracer celle qui admet l'axe (Ox) comme asymptote.

Exercice 16
Déterminer l'enveloppe de la famille $D_t : (t+1)x + (t-2t^2)y + t^2 = 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

Exercice 17
Soit Γ la courbe admettant un paramétrage $x(t) = \dfrac{2}{t^2+1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}$.
Pour $t \notin \{0, 1, -1\}$, on désigne par Δ_t la droite passant par $M(t)$ et $M(1/t)$.

1) Déterminer l'enveloppe de la famille $(\Delta_t)_t$.

2) Montrer que cette enveloppe est contenue dans une conique que l'on déterminera.