

Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1

Pour chacune des suites 1 à 3, on forme l'équation caractéristique.

1) $u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \qquad \text{donc} \qquad r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = 2$$

La suite est de la forme $u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 2^n$. De plus $\begin{cases} u_0 = 4 = \lambda + \mu \\ u_1 = 7 = \lambda + 2\mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{u_n = 1 + 3.2^n}$

2) $u_0 = -2$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \qquad \text{donc} \qquad r_1 = r_2 = 2$$

La suite est de la forme $u_n = (\lambda n + \mu)2^n$. De plus $\begin{cases} u_0 = -2 = \mu \\ u_1 = 2 = 2(\lambda + \mu) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -2 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{u_n = (3n-2).2^n}$

3) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 3$. Cherchons la solution générale de la suite « homogène ».

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \qquad \text{donc} \qquad r_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - 2i$$

La suite est de la forme $v_n = \lambda(1+2i)^n + \mu(1-2i)^n$. On cherche une « solution particulière » de la formule générale, sous la forme d'une suite constante : $w_n = K$.

$$K - 2K + 5K = 4K = 3 \Longrightarrow K = \frac{3}{4}$$

Donc $u_n = v_n + w_n = \lambda(1+2i)^n + \mu(1-2i)^n + \dfrac{3}{4}$ De plus

$$\begin{cases} v_0 = 1 = \lambda + \mu + \dfrac{3}{4} \\ v_1 = -1 = (1+2i)\lambda + (1-2i)\mu + \dfrac{3}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \dfrac{1}{4} \\ 2i(\lambda - \mu) = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+3i}{8} \\ -\mu = \dfrac{1-3i}{8} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{u_n = \frac{1}{8}((1+3i)(1+2i)^n + (1-3i)(1-2i)^n) + \frac{3}{4} = \frac{1}{8}\operatorname{Re}((1+3i)(1+2i)^n) + \frac{3}{4}}$

Remarque : On pouvait aussi écrire la solution sous la forme $u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$, avec $r = |r_1| = \sqrt{5}$ et θ un argument de r_1. Comme θ ne se calcule pas, on n'obtient pas a priori d'expression plus sympathique de u_n. *(Pour déterminer λ et μ dans ce cas, il suffit de connaître $\cos\theta$ et $\sin\theta$.)*

4) Écrivons ce système sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate, sur le modèle des suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = A^n X_0$$

Il reste à calculer A^n, et donc à réduire la matrice. Polynôme caractéristique [1]

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -12 & -6 \\ 6 & -5-\lambda & -3 \\ 18 & -18 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -6 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -2+2\lambda & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Sous-espaces propres :

- $E_1 = \text{Ker}\,(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 12 & -12 & -6 \\ 6 & -6 & -3 \\ 18 & -18 & -9 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
- $E_{-2} = \text{Ker}\,(A + 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 15 & -12 & -6 \\ 6 & -3 & -3 \\ 18 & -18 & -6 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ (après résolution du système)

Avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, il vient

$$X_n = A^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}X_0$$

Si on note $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, qui dépend des conditions initiales, il vient $X_n = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + 2.(-2)^n\nu \\ \lambda + (-2)^n\nu \\ 2\mu + 3.(-2)^n\nu \end{pmatrix}$ puis

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u_n & = & \lambda + \mu + 2.(-2)^n\nu \\ v_n & = & \lambda + (-2)^n\nu \\ w_n & = & 2\mu + 3.(-2)^n\nu \end{array}}$$

Exercice 2

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit

$$X' = AX + B \tag{1}$$

Réduisons [2] la matrice A : $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2\lambda & 2-\lambda & 4 \\ -\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = .. = -\lambda^2(\lambda - 3)$

Sous-espaces propres :

- $E_3 = \text{Ker}\,(A - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1. Opérations : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3$.
2. Opérations : $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 + C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3$.

- $E_0 = \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ (après résolution du système). A n'est pas diagonalisable.
- On complète la famille libre de vecteurs propres $e_1 = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ avec un troisième vecteur qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, par exemple $e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Décomposons l'image de e_3 dans la base $\mathscr{B}'$ de réduction.
$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 + 0e_3 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2$$

La matrice de passage vers la nouvelle base est donc $P = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\4 & -2 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et la matrice réduite $T = \begin{pmatrix}3 & 0 & 1/3\\0 & 0 & 2/3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Notons $X_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de X dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$, et $B_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ celui de B. Le système (1) s'écrit
$$X_1' = TX_1 + B_1 \qquad \text{avec} \qquad X = PX_1 \quad \text{et} \quad B = PB_1$$

De plus $B = PB_1 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4\alpha + \beta + \gamma & = & e^t\\ 4\alpha - 2\beta & = & 0\\ \alpha + \beta & = & 0\end{array}\right. \iff B_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\e^t\end{pmatrix}$. Donc le système s'écrit
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & 3x_1 + \frac{1}{3}z_1\\ y_1' & = & \frac{2}{3}z_1\\ z_1' & = & e^t\end{array}\right.$$

Il suffit de résoudre en partant de la dernière ligne. Attention, les constantes sont importantes !
$$(1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & 3x_1 + \frac{1}{3}z_1\\ y_1' & = & \frac{2}{3}z_1\\ z_1 & = & e^t + K_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & 3x_1 + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}K_1\\ y_1 & = & \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}K_1 t + K_2\\ z_1 & = & e^t + K_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & K_3 e^{3t} - \frac{1}{6}e^t - \frac{K_1}{9}\\ y_1 & = & \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}K_1 t + K_2\\ z_1 & = & e^t + K_1\end{array}\right.$$

Pour résoudre l'équation en x_1, on commence par résoudre l'équation homogène : $f(t) = K_3 e^{3t}$. Puis on cherche une solution particulière (ou en désespoir de cause on fait varier la constante) pour $\frac{1}{3}e^t$ et pour $\frac{K_1}{3}$: on trouve respectivement $g(t) = -\frac{1}{6}e^t$ et $h(t) = -\frac{K_1}{9}$. On conclue par le principe de superposition :
$$x_1 = f(t) + g(t) + h(t) = K_3 e^{3t} - \frac{1}{6}e^t - \frac{K_1}{9}$$

Il reste à revenir dans la base de départ en écrivant que $X = PX_1$:
$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 4K_3 e^{3t} + e^t + \frac{2}{3}K_1 t + K_2 + \frac{5}{9}K_1\\ y(t) & = & 4K_3 e^{3t} - 2e^t - \frac{4}{3}K_1 t - 2K_2 - \frac{4}{9}K_1\\ z(t) & = & K_3 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{3}K_1 t + K_2 - \frac{1}{9}K_1\end{array}\right.}$$

Exercice 3

La fonction tangente est π-périodique, donc ρ est T-périodique avec $2T/3 = \pi$, donc $T = \dfrac{3\pi}{2}$. De plus il ne faut pas perdre de vue que notre courbe Γ est tracée par les équations $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$

On se contente de tracer Γ_0 correspondant à θ dans un intervalle de longueur $\dfrac{3\pi}{2}$, puis on obtient le reste de Γ par *trois* rotations de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$, pour retomber sur un multiple de 2π.

De plus ρ est impaire, donc on peut se contenter de l'étudier sur $[0, 3\pi/4[$, on obtiendra Γ_0 à partir de Γ_0' via une symétrie d'axe (Oy).

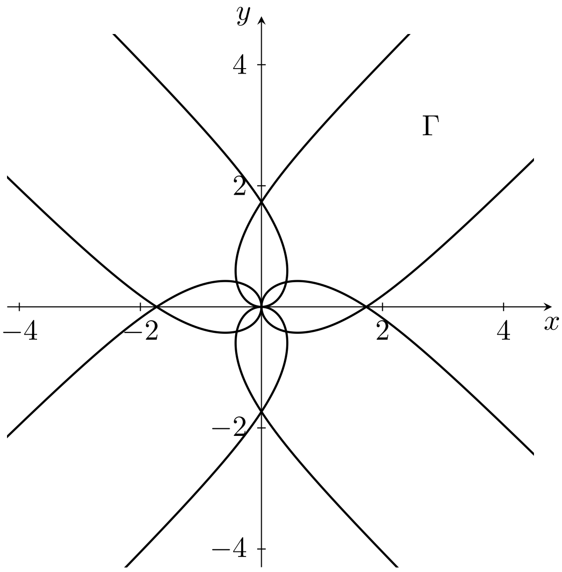
Lorsque $\theta \to \dfrac{3\pi}{4}$, il y a une branche infinie. On pose $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - h$, et

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right)\sin h = -\frac{\cos\left(\frac{2h}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2h}{3}\right)}\sin h \sim -\frac{3h}{2h} = -\frac{3}{2}$$

La droite d'équation, dans le repère mobile $(\overrightarrow{u}_{\frac{3\pi}{4}}, \overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}})$, $Y = -\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe.

Instruction Maple : `> restart :`

```
> with(plots) :
> rho :=theta->tan(2*theta/3) ;
> plot(rho(theta),theta = 0..6*Pi,view=[-4..4,-4..4],coords=polar) ;
```



Exercice 4 (cardioïde)

1) Construction classique. On se place sur $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour la suite de l'exercice.

2) Calcul de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$: $\rho'^2 + \rho^2 = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$, donc, puisque $(\cos\theta/2) \geqslant 0$, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

Vecteur tangent unitaire : $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(-\sin\theta\overrightarrow{u} + (1+\cos\theta)\overrightarrow{v}) = (-\sin\dfrac{\theta}{2})\overrightarrow{u} + (\cos\dfrac{\theta}{2})\overrightarrow{v}$

Donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T}) = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$, puis $\boxed{\alpha = \theta + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}}$ et

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{3/2} = \boxed{\frac{4}{3}\cos\frac{\theta}{2}}$$

3) Comme $\alpha = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées (cartésienne) du centre de courbure $C(\theta)$ de Γ sont données par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$:

$$\boxed{\begin{cases} x_C &= (1+\cos\theta)\cos\theta - \dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{2\theta}{2} &= \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y_C &= (1+\cos\theta)\sin\theta - \dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{2\theta}{2} &= \dfrac{1}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}}$$

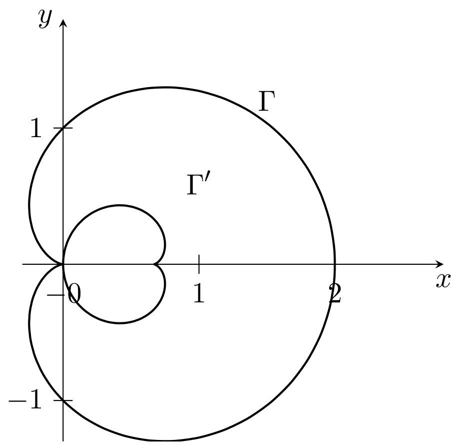
4) L'équation cartésienne de Δ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, est $\begin{cases} x_C &= \dfrac{1}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y_C &= \dfrac{1}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$

Ce qui donne l'équation polaire $\boxed{\rho_C = \dfrac{1}{3}(1+\cos(\theta+\pi))}$

5) Donc $\Delta = f(\Gamma)$ avec $f = h \circ t$, où t est la translation de vecteur $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\imath}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{3}$. En composant h et t (par exemple dans $\mathbb{C}$, cf votre cours de terminale), on trouve que

$$\boxed{\Delta \text{ est l'image de } \Gamma \text{ par l'homothétie de centre } I(1/2,0) \text{ et de rapport } -1/3.}$$

6) Tracé.



Exercice 5 (d'après Agrégation interne 2011 (1))

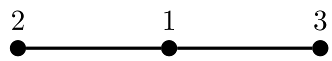


Figure 1 – Le graphe G_1 : $n = 3$ et $A = \Big\{\{1,2\},\{1,3\}\Big\}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 1 (Exemples)

1) Par définition, $L_{ij} = L_{ji}$, donc la matrice L est **symétrique réelle**, et l'endomorphisme $\mathscr{L}$ associé est symétrique. Ainsi, il est diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ formée de vecteurs propres de } \mathscr{L}.}$$

2) Exemple 1 : un graphe linéaire.

$$\chi_L(\lambda) = \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_E) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Sous-espaces propres. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

- $E_{\lambda_1} = \text{Ker } L = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$, donc on pose

$$\boxed{e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

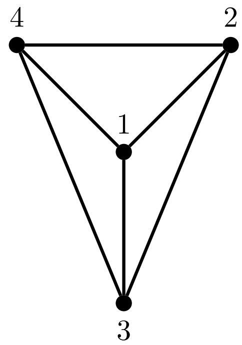
- $E_{\lambda_2} = \text{Ker}\,(L - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, donc on pose

$$\boxed{e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

- $E_{\lambda_3} = \text{Ker}\,(L - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$, donc on pose

$$\boxed{e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

3) Exemple 2 : le graphe complet.



a) Le graphe K_4 : $n = 4$ et $A = \mathscr{P}_2(4)\}$.

b) Tous les sommets sont voisins les uns des autres, donc un sommet fixé sera voisin d'exactement $n-1$ autres sommets : $d_i = n - 1$. Ainsi $L_{ij} = -1/\sqrt{d_i d_j} = -1/(n-1)$ pour tout $i \neq j$:

$$L = -\frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(n-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{n}{n-1} I_n - \frac{1}{n-1} J}$$

c) On réduit la matrice J, la matrice I_n étant réduite dans toutes les bases.
On remarque que J est de rang 1, donc, par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } J = n - 1$ et 0 est valeur propre de J de multiplicité $n-1$.
Il nous reste une valeur propre à trouver (puisque J est symétrique réelle et donc diagonalisable) : $\text{Tr}\,(J) = n$ donc la dernière valeur propre vaut n, de multiplicité 1.

Ainsi dans une base de diagonalisation, J est semblable à $D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, et dans cette même base L est semblable à

$$\frac{n}{n-1}I_n - \frac{1}{n-1}D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres du laplacien } \mathscr{L} \text{ de } K_n \text{ sont 0 de multiplicité 1 et } \frac{n}{n-1} \text{ de multiplicité } n-1.}$$

Partie 2 (Quelques généralités)

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Par définition du produit matriciel et du produit scalaire,

$$< \mathscr{L}(x), x >=< (\sum_{j=1}^{n} L_{ij}x(j))_j, x >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}x(j)x(i)$$

Or par définition de L, on peut découper la somme sur j en trois morceaux, le dernier étant nul (sommets différents et non voisins).

$$< \mathscr{L}(x), x >= \sum_{i=1}^{n}\left(x(i)^2 + \sum_{j\sim i} -\frac{x(j)x(i)}{\sqrt{d_i d_j}}\right)$$

Or en développant le membre de droite on trouve trois sommes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i}\left(\frac{x(i)^2}{d_i} - 2\frac{x(i)x(j)}{\sqrt{d_i d_j}} + \frac{x(j)^2}{d_j}\right) = (1) + (2) + (3)$$

Or, par définition de d_i, $\sum_{j\sim i}$ est une somme de d_i termes, donc $\sum_{j\sim i}\frac{x(i)^2}{d_i} = d_i\frac{x(i)^2}{d_i} = x(i)^2$.

$$(1) = \sum_{i=1}^{n} x(i)^2$$

De plus, par symétrie de la relation « être voisin de », $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i}\frac{x(j)^2}{d_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\sim j}\frac{x(j)^2}{d_j} = \sum_{j=1}^{n} x(j)^2$.

$$(3) = \sum_{j=1}^{n} x(j)^2 = \sum_{i=1}^{n} x(i)^2$$

car j est une variable muette. Donc finalement

$$\begin{aligned}(1)+(2)+(3) &= \sum_{i=1}^{n} x(i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i} -2\frac{x(j)x(i)}{\sqrt{d_i d_j}} + \sum_{i=1}^{n} x(i)^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left(x(i)^2 + \sum_{j\sim i} -\frac{x(j)x(i)}{\sqrt{d_i d_j}}\right) = 2 < \mathscr{L}(x), x >\end{aligned}$$

En conclusion, la seconde somme ne faisant que constater que l'on a parcouru toutes les arrêtes deux fois dans la première somme, on a le résultat voulu :

$$\boxed{< \mathscr{L}(x), x >= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\sim j}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 = \sum_{\{i,j\}\in A}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (donc $x \neq 0$) de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ : $\mathscr{L}(x) = \lambda x$.

$$< \mathscr{L}(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda \|x\|^2$$

Or d'après la question 1)a), $< \mathscr{L}(x), x >$ est une somme de carrés, donc positive. Or $\|x\|^2 > 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{Les valeurs propres de } \mathscr{L} \text{ sont positives ou nulles.}}$

c) On revient à la définition des L_{ij} de nouveau :

$$\mathscr{L}(\varphi_1)(i) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\varphi_1(j) = \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{D}} + \sum_{j\sim i} -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}\frac{\sqrt{d_j}}{\sqrt{D}} = \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{D}} - \sum_{j\sim i}\frac{1}{\sqrt{d_i D}} = \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{D}} - \frac{d_i}{\sqrt{d_i D}} = 0$$

Puisque la dernière somme continent d_i termes qui ne dépendent pas de j. Donc $\boxed{\varphi_1 \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}}$
Ainsi $E_0 = \operatorname{Ker}(\mathscr{L} - 0\,\mathrm{id}\,) \neq \{0\}$ puisque $\varphi_1 \neq 0$ est dedans, et 0 est valeur propre.
Or 0 est la plus petite valeur propre possible d'après 1)b), donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}^n$. La base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est orthonormale, donc

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x > \varphi_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x >^2$$

De plus c'est une base de vecteurs propres, donc $\mathscr{L}(\varphi_i) = \lambda_i\varphi_i$. Ainsi par linéarité,

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x > \mathscr{L}(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x > \lambda_i\varphi_i$$

Puis $< \mathscr{L}(x), x >= \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x > \lambda_i < \varphi_j, x >< \varphi_i, \varphi_j >= \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x >^2 \lambda_i$. En conclusion,

$$\boxed{\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x >^2}}$$

b) *C'est une question classique et une méthode tout aussi classique pour déterminer un max (ou un min).*

- Notons $M = \max\left\{\dfrac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0\right\}$. Pour $x = \varphi_n$, on trouve

$$\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \frac{< \mathscr{L}(\varphi_n), \varphi_n >}{\|\varphi_n\|^2} = \lambda_n$$

  Donc $\lambda_n \leqslant M$ (puisque M est le maximum).
  De plus, par définition de λ_n, $\lambda_i \leqslant \lambda_n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, en utilisant la formule du 2)a),

$$\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x >^2} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_n < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, x >^2} = \lambda_n$$

  Donc en passant au maximum dans l'inégalité, $M \leqslant \lambda_n$. Par double inégalité, $\boxed{M = \lambda_n}$

- Notons $m = \min\left\{\dfrac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \text{ et } < x, \varphi_1 >= 0\right\}$ Pour $x = \varphi_2$, comme (φ_i) est une base orthonormée, on trouve

$$\frac{< \mathscr{L}(\varphi_2), \varphi_2 >}{\|\varphi_2\|^2} = \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad < \varphi_2, \varphi_1 >= 0$$

  Donc $\lambda_2 \geqslant m$ (puisque M est le minimum).

Si $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie $< x, \varphi_1 >= 0$, alors la somme commence à $i = 2$:

$$\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \lambda_i < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=2}^{n} < \varphi_i, x >^2}$$

De plus, par définition de λ_2, $\lambda_i \geqslant \lambda_n$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. Ainsi, en utilisant la formule du 2)a),

$$\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \lambda_i < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=2}^{n} < \varphi_i, x >^2} \geqslant \frac{\sum_{i=2}^{n} \lambda_2 < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=2}^{n} < \varphi_i, x >^2} = \lambda_2$$

Donc en passant au maximum dans l'inégalité, $m \geqslant \lambda_2$. Par double inégalité, $\boxed{m = \lambda_2}$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{lcl} \lambda_n & = & \max\left\{\dfrac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0\right\} \\ \lambda_2 & = & \min\left\{\dfrac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \text{ et } < x, \varphi_1 >= 0\right\} \end{array}}$

Partie 3 (Étude des bornes des valeurs propres)

Non posée.

Partie 4 (à propos du nombre chromatique)

1) Soit $F = \{\begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} \mid X_p \in \mathbb{R}^p\}$.

a) Comme H est symétrique, H_p est symétrique.
La matrice H est positive, donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \qquad {}^t X H X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij} x_j \geqslant 0$$

Donc, puisque c'est vrai pour tout X, c'est en particulier vrai pour les $X \in F$ de la forme $\begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire vérifiant $x_i = 0$ pour tout $i \geqslant p$.

$$\forall X_p \in \mathbb{R}^p \qquad {}^t \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} x_i h_{ij} x_j \geqslant 0$$

Or $\sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} x_i h_{ij} x_j = {}^t X_p H_p X_p$. Donc $\boxed{H_p \text{ est une matrice symétrique positive.}}$

b) En suivant la même idée qu'à la question précédente pour écrire $< H_p X, X >$, d'après 2)2)b) (principe du minimax),

$$\alpha = \max\left\{\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0\right\} \quad \text{et} \quad \alpha_p = \max\left\{\frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in F \text{ et } x \neq 0\right\}$$

Or $F \subset \mathbb{R}^n$ donc quand on passe aux maxima $\boxed{\alpha \geqslant \alpha_p}$.

2) **a)** Par définition, les colonnes de H sont colinéaire à φ, donc rg $H \leqslant 1$. Or $\varphi \neq 0$, donc $\boxed{\text{rg } H = 1}$

b) Comme rg $H = 1$, par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} H = n - 1$ et

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de multiplicité } n - 1.}$$

Si on note λ la valeur propre restante,

$$\operatorname{Tr} H = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i)^2 = \|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 + \lambda$$

Donc $\boxed{\lambda = \|\varphi\|^2 \text{ est valeur propre de multiplicité } 1.}$

3) **a)** Par définition, $(\varphi_1{}^t\varphi_1)_{ij} = \varphi_1(i)\varphi_1(j) = \dfrac{\sqrt{d_i d_j}}{D_G}$, donc $\boxed{M = D_G\varphi_1{}^t\varphi_1}$

De plus, par associativité du produit matriciel,

$$M\varphi_i = (D_G\varphi_1{}^t\varphi_1)\varphi_i = D_G\varphi_1({}^t\varphi_1\varphi_i) = D_G\varphi_1 < \varphi_1, \varphi_i >= D_G\delta_{ij}\varphi_1$$

Donc si $i = 1$, φ_1 est vecteur propre pour la valeur propre D_G, et sinon $M\varphi_i = 0$ et φ_i est aussi un vecteur propre (pour la valeur propre 0).

Tel qu'il est posé, le sujet est faux : si $\lambda_2 = \lambda_1$, il y a des vecteurs propres de L qui ne sont pas vecteurs propres de M... Mais en fait, on n'a besoin uniquement de savoir que les φ_i sont vecteurs propres.

b) Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour L, I_n (qui reste toujours diagonale) et M, c'est une base orthonormée de vecteurs propres pour $N = L - I_n + \dfrac{\lambda}{D_G}M$.

- $N\varphi_1 = L\varphi_1 - \varphi_1 + \dfrac{\lambda_n(G)}{D_G}M\varphi_1 = 0 - \varphi_1 + \dfrac{\lambda_n(G)}{D_G}D_G\varphi_1 = (\lambda_n(G) - 1)\varphi_1$
- Pour $i \in [\![2, n]\!]$, $N\varphi_i = L\varphi_i - \varphi_i + \dfrac{\lambda_n(G)}{D_G}M\varphi_i = \lambda_i\varphi_i - \varphi_i + 0 = \lambda_i - 1$

Donc les valeurs propres de N sont $(\lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$, et $\boxed{\text{La plus grande est } \lambda - 1.}$

4) **a)** Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_i d_j}} & \text{si } i \sim j \\ 0 & sinon \end{cases}$

Or par hypothèse sur $\Omega = [\![1, p]\!]$, $i \sim j$ n'arrive jamais. Donc $\boxed{L_p = I_p}$

Par linéarité, $B = N_p$ est la combinaison linéaire des blocs $p \times p$ de L, I_n et M :

$$B = N_p = L_p - I_p + \frac{\lambda}{D_G}M_p = I_p - I_p + \frac{\lambda}{D_G}(\sqrt{d_i d_j})_{ij} = \frac{\lambda}{D_G}\begin{pmatrix}\sqrt{d_1}\\ \sqrt{d_2}\\ \vdots \\ \sqrt{d_p}\end{pmatrix}.(\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}\dots\sqrt{d_p})$$

Donc B est à un scalaire près de la forme $\varphi{}^t\varphi$ avec $\varphi = \begin{pmatrix}\sqrt{d_1}\\ \sqrt{d_2}\\ \vdots \\ \sqrt{d_p}\end{pmatrix}$ de norme D_Ω Ainsi, d'après 2)b),

$$\boxed{B \text{ a pour valeurs propres 0 de multiplicité } n-1 \text{ et } \frac{\lambda}{D_G}D_\Omega \text{ de multiplicité 1.}}$$

b) D'après 1)b), $\alpha \geqslant \alpha_p$. Or dans le cas de $H = N$, $\alpha = \lambda - 1$ (3)b)) et $\alpha_p = D_\Omega\dfrac{\lambda}{D_G}$ (4)a)).

Finalement, $\boxed{\lambda - 1 \geqslant \lambda\dfrac{D_\Omega}{D_G}}$.

5) Si $\lambda = 1$, l'inégalité du 4)b) signifie $0 \geqslant \dfrac{D_{\Omega_k}}{D_G}$, c'est-à-dire $D_{\Omega_k} = 0$, ce qui est absurde car Ω_k est non vide. Par conséquent $\boxed{\lambda \text{ n'est pas égale à } 1}$

L'inégalité du 4)b) peut s'écrire $\dfrac{D_G}{D_{\Omega_k}} \geqslant \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$, puisque $\lambda - 1 > 0$ d'après 4)b).

Comme $[\![1, n]\!] = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{r} \Omega_k$, $D_G = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} D_{\Omega_k}$. Si on suppose que $D_{\Omega_r} = \max\limits_k D_{\Omega_k}$, il vient $D_G \leqslant rD_{\Omega_r}$.

En conclusion : $\dfrac{\lambda}{\lambda-1} \leqslant \dfrac{D_G}{D_{\Omega_r}} \leqslant \dfrac{rD_{\Omega_r}}{D_{\Omega_r}} = r = \chi(G)$.

$$\boxed{\chi(G) \geqslant 1 + \frac{1}{\lambda - 1}}$$

6) D'après 1)3)c), $\lambda = \dfrac{n}{n-1}$. Donc l'inégalité ci-dessus s'écrit $\chi(G) \geqslant 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n-1} - 1} = n$.
Or il y a un coloriage évident à n couleurs : chaque sommet d'une couleur différente.
Conclusion : Le graphe complet à n sommet K_n a pour nombre chromatique n.