

Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, expliciter les suites en fonction de n.

1) $u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$;

2) $u_0 = -2$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$;

3) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 3$ ($\mathbb{C}$) ;

4) $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 13u_n - 12v_n - 6w_n \\ v_{n+1} & = & 6u_n - 5v_n - 3w_n \\ w_{n+1} & = & 18u_n - 18v_n - 8w_n \end{array}\right.$

Exercice 2

Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2x + y + e^t \\ y' & = & 2y + 4z \\ z' & = & x - z \end{array}\right.$

Exercice 3

Symétries et asymptotes de $\rho = \tan \dfrac{2\theta}{3}$. Tracé à l'aide de Maple (instruction + allure obtenue).

Exercice 4 (cardioïde)

Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

1) Étudier et tracer Γ.

2) Calculer le rayon de courbure R de Γ en M.

3) Déterminer en fonction de θ les coordonnées (cartésienne) du centre de courbure $C(\theta)$ de Γ en M.

4) Soit $\Omega(2/3, 0)$. Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, trouver l'équation de Δ, développée de Γ.

5) Montrer que Δ est l'image de Γ par une transformation affine simple.

6) Tracer Δ sur la même feuille que Γ.

Exercice 5

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Soit un entier $n \geqslant 1$. On appelle **graphe** à n sommets tout couple $G = (\llbracket 1, n\rrbracket, A)$, où $\llbracket 1, n\rrbracket$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et n et A est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{P}_2(n)$ des parties à 2 éléments de $\llbracket 1, n\rrbracket$ ($\mathscr{P}_2(n)$ est l'ensemble des paires d'éléments de $\llbracket 1, n\rrbracket$).

Les éléments de $\llbracket 1, n\rrbracket$ sont appelés **sommets** du graphe G et les éléments de A sont appelés **arêtes** de G.

Deux sommets distincts i et j sont dits **voisins** dans G lorsque $\{i, j\}$ est une arête du graphe.
On note alors $i \sim j$ (rappel : en ce cas i et j sont distincts et on a aussi $j \sim i$).
Pour tout sommet $i \in \llbracket 1, n\rrbracket$, on appelle **degré** de i et on note $d_i \in \mathbb{N}$ le nombre de voisins de i.
Nous supposerons que $d_i \geqslant 1$ pour tout sommet i de G, c'est-à-dire que le graphe n'a aucun sommet isolé.

On note $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des vecteurs-colonne à coefficients réels.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \llbracket 1, n\rrbracket$, on note $y(i)$ sa i-ème composante.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique défini par

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^n, \qquad < y, z > = < \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(1) \\ \vdots \\ z(n) \end{pmatrix} > = \sum_{i=1}^{n} y(i)z(i)$$

ainsi que de la norme euclidienne associée $\|y\| = < y, y >$. Enfin, $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Le **Laplacien** $\mathscr{L}$ de G est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $L = (L_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice laplacienne) dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifie

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_i d_j}} & \text{si } i \sim j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

À titre d'exemple, on montre ci-dessous un graphe et sa matrice laplacienne associée.

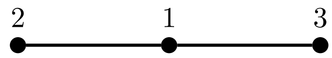

FIGURE 1 – Le graphe G_1 : $n = 3$ et $A = \Big\{\{1,2\},\{1,3\}\Big\}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de ce problème est de mettre en évidence certaines informations combinatoires contenues dans les valeurs propres de L.
Dans la partie 1, on calcule le spectre sur deux exemples.
Dans la partie 2 (partiellement posée), on étudie le lien avec la connexité et on établit le principe du minimax.
Dans la partie 3 (non posée), on étudie les valeurs maximales que peuvent prendre λ_2 (deuxième plus petite valeur propre) et λ_n (plus grande valeur propre) .
Dans la partie 4, on donne des bornes pour le nombre chromatique.

Partie 1 (Exemples)

1) Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathscr{L}$.

Nous noterons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses n valeurs propres, éventuellement comptées avec leurs ordres de multiplicité dans le polynôme caractéristique de L, et $\mathrm{Sp}(\mathscr{L})$ l'ensemble de ces valeurs propres (il possède entre 1 et n éléments). On notera que L n'est pas diagonale puisqu'aucun sommet n'est isolé.

2) Exemple 1 : un graphe linéaire.
Déterminer les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres pour la matrice L correspondant au graphe G_1 défini dans le préliminaire.

3) Exemple 2 : le graphe complet.
Soit un entier $n \geqslant 2$. On note K_n le graphe $([\![1, n]\!], \mathscr{P}_2(n))$, ce qui revient à considérer que chacun des n sommets de K_n est voisin de tous les autres sommets.

- **a)** Tracer le graphe pour $n = 4$.
- **b)** Écrire la matrice L du graphe K_n comme combinaison linéaire de la matrice identité I_n d'ordre n et de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- **c)** Donner les valeurs propres du laplacien $\mathscr{L}$ de K_n, en explicitant leurs ordres de multiplicité (<u>Indication</u> : *Commencer par réduire la matrice* J).

Partie 2 (Quelques généralités)

Soit $n \geqslant 2$ et $G = ([\![1, n]\!], A)$ un graphe à n sommets. Soit m le nombre d'arêtes de G et $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$.
On note $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i$, et φ_1 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_1(k) = \dfrac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}}$.

1) **a)** Démontrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, les égalités suivantes :

$$< \mathscr{L}(x), x > \ = \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\sim j}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2$$

$$< \mathscr{L}(x), x > \ = \sum_{\{i,j\}\in A}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2$$

b) En déduire que les valeurs propres de $\mathscr{L}$ sont positives ou nulles.

c) Calculer $\mathscr{L}(\varphi_1)$. En déduire que $\varphi_1 \in \operatorname{Ker} \mathscr{L}$ et que $\lambda_1 = 0$.

2) Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base orthonormale de diagonalisation, où φ_1 est le vecteur défini au préambule du B et telle que φ_i soit un vecteur propre pour la valeur propre λ_i (telles que les valeurs propres ont été rangées dans la partie A).

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\dfrac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i < \varphi_i, x >^2}{\sum_{i=1}^n < \varphi_i, x >^2}$.

b) Démontrer que
$$\lambda_n = \max\left\{ \frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad x \neq 0 \right\}$$
$$\lambda_2 = \min\left\{ \frac{< \mathscr{L}(x), x >}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \quad \text{et} \quad < x, \varphi_1 >= 0 \right\}$$
Ces deux égalités seront appelées **principe du minimax** et serviront par la suite.

Partie 3 (Étude des bornes des valeurs propres)

Non posée.

Partie 4 (à propos du nombre chromatique)

Soit $n \geqslant 2$ et $G = ([\![1, n]\!], A)$ un graphe à n sommets. On notera dans cette partie $D_G = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_i$ où d_i est le degré du sommet i, et $\lambda = \lambda_n(G)$ la plus grande valeur propre de $\mathscr{L}$.

1) Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée symétrique réelle d'ordre n. Pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$ on introduit la matrice $H_p = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
On suppose de plus que H est positive, c'est-à-dire que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXHX \geqslant 0$. (ce qui peut aussi s'écrire $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $< HX, X >\geqslant 0$)

a) Démontrer que H_p est une matrice symétrique positive.

b) On note respectivement α et α_p les plus grandes valeurs propres de H et H_p. En utilisant le principe du minimax, et en considérant le sous-espace vectoriel $F = \{\begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix} \mid X_p \in \mathbb{R}^p\}$ (écriture blocs) de $\mathbb{R}^n$, montrer que $\alpha \geqslant \alpha_p$.

2) Soit φ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère la matrice symétrique réelle $H = \varphi {}^t\varphi \in \mathscr{M}_n(R)$, ${}^t\varphi$ désignant la matrice-ligne transposée de la matrice-colonne associée à φ.

a) Déterminer le rang de H.

b) Démontrer que H admet pour valeurs propres 0 et $\|\varphi\|^2$; préciser les ordres de multiplicité de ces deux valeurs propres.

3) On introduit jusqu'à la fin de l'énoncé les deux matrices $M = \left(\sqrt{d_i d_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $N = L - I_n + \dfrac{\lambda}{D_G} M$.

a) Démontrer que $M = D_G \varphi_1 {}^t\varphi_1$, où φ_1 est défini dans l'introduction de la partie B, et en déduire que tous les vecteurs propres de L sont aussi des vecteurs propres de M.

b) Démontrer que la plus grande valeur propre de N est $\lambda - 1$.

4) Soit un entier $p \geqslant 2$ et $\Omega = [\![1, p]\!]$.
Nous supposons que Ω est un ensemble indépendant de sommets au sens où aucune arête du graphe ne relie des sommets de Ω entre eux, c'est-à-dire : $\forall \{i, j\} \in A$, $(i \in \Omega \Longrightarrow j \notin \Omega)$.

On note aussi $D_\Omega = \displaystyle\sum_{i=1}^p d_i$.

a) Notons $N = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & E \end{pmatrix}$ où $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, $E \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$.

Calculer la matrice L_p associé à L comme au 4.1). En déduire que $B = \dfrac{\lambda}{D_G} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} \\ \sqrt{d_2} \\ \vdots \\ \sqrt{d_p} \end{pmatrix} .(\sqrt{d_1}\sqrt{d_2} \ldots \sqrt{d_p})$

puis les valeurs propres de B.

b) Démontrer que $\lambda - 1 \geqslant \lambda \dfrac{D_\Omega}{D_G}$.

5) Supposons qu'il existe un entier $r \geqslant 2$ et une partition de $[\![1, n]\!]$ en r ensembles $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ indépendants, c'est-à-dire qui vérifient

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \forall \{i, j\} \in A, \qquad (i \in \Omega_k \Longrightarrow j \notin \Omega_k)$$

On dit alors que G est r-**coloriable**.

En d'autres termes, on dispose d'une palette de r couleurs et on « colorie » les sommets contenus dans Ω_k avec la k-ième couleur de la palette, si bien que deux sommets voisins ne sont jamais de la même couleur [1].

On appelle enfin **nombre chromatique** de G et on note $\chi(G)$ le plus petit entier r pour lequel G est r-coloriable.

Démontrer que λ n'est pas égale à 1 et que $\chi(G) \geqslant 1 + \dfrac{1}{\lambda - 1}$.

6) Calculer $\chi(G)$ lorsque $G = K_n$.

1. Un carte géographique peut se représenter par un graphe (chaque pays est un sommet, et une frontière commune est une arête), et le problème de colorier la carte est équivalent à celui de colorier le graphe en question