Devoir de Mathématiques numéro 5.5

Correction

Exercice 1 (PT 2009, A, partie C)

- 1) Voir l'exercice 1 de la feuille d'algèbre bilinéaire. Cette question est **classique**.
- 2) Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\Phi(MU)^2 = \text{Tr}(MU^t(MU)) = \text{Tr}(MU^tU^tM) = \text{Tr}(MI_n^tM) = \Phi(M)^2$$

Donc $\Phi(MU) = \Phi(M)$

- 3) a) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (de dimension 2, ces matrices n'étant pas colinéaires).
- b) *On remarque que $\dim F = 2$ donc $\dim F^\perp = 4 - \dim F = 2$.*

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F^\perp &\iff \left(M \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(M \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ &\iff \text{Tr} \begin{pmatrix} x & * \\ * & -t \end{pmatrix} = x - t = 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr} \begin{pmatrix} y & * \\ * & z \end{pmatrix} = y + z = 0 \\ &\iff M \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ces deux matrices ne sont pas colinéaires, elles forment donc une base de $F^\perp$.

- c) Les deux matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ précédentes sont orthogonales pour $(\cdot, \cdot)$, donc la projection orthogonale p_F sur F s'écrit

$$A' = p_F(A) = \frac{(M_1|A)}{(M_1|M_1)}M_1 + \frac{(M_2|A)}{(M_2|M_2)}M_2 = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (PT 2009, A, partie D)

- 1) • Symétrique : pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$, $\psi(P, Q) = \sum_{i=0}^3 P(i)Q(i) = \sum_{i=0}^3 Q(i)P(i) = \psi(Q, P)$.
- Bilinéaire : pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \sum_{i=0}^3 (\lambda P_1(i) + P_2(i))Q(i) = \lambda \sum_{i=0}^3 P_1(i)Q(i) + \sum_{i=0}^3 P_2(i)Q(i) = \lambda \psi(P_1, Q) + \psi(P_2, Q)$$

La linéarité à droite s'obtient par symétrie.

- Positif : pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\psi(P, P) = \sum_{i=0}^3 P(i)^2 \geq 0$.
- Défini : soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. $\psi(P, P) = \sum_{i=0}^3 P(i)^2 = 0$ entraîne $P(i)^2 = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, 3\}$.

Par conséquent P a quatre racines : 0, 1, 2 et 3. Or c'est un polynôme de degré au plus 3, donc $P = 0$.

Ainsi ψ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2) a) • Unicité : Soit R_1 et R_2 deux polynômes qui conviennent.

Alors, pour tout $i \in \{0, \dots, 3\}$, $(R_1 - R_2)(i) = x_i - x_i = 0$, donc $R_1 - R_2$ est un polynôme de degré au plus 3 ayant 4 racines : c'est le polynôme nul. En conclusion, $R_1 = R_2$: il y a unicité.

• Existence : On interpole à l'aide des polynômes de Lagrange. Le polynôme suivant convient

$$R(X) = x_0 \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{-6} + x_1 \frac{X(X-2)(X-3)}{2} + x_2 \frac{X(X-1)(X-3)}{-2} + x_3 \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

Rappel : pour une famille $(a_0, \dots, a_n)$ de réels tous distincts, les polynômes d'interpolation de Lagrange

sont de la forme $L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$, ils vérifient $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

Enfinement : Il existe un polynôme R , et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, 3\} \quad R(i) = x_i$.

b) Dans la base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F , il s'écrit $p_F(R) = \sum_{i=0}^2 \psi(R, P_i) P_i$.

$$\psi(R, P_0) = \frac{1}{2}(1 + 3 + 2 + 3) = \frac{9}{2}$$

$$\psi(R, P_1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{3}{2} - 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2\sqrt{5}}$$

$$\psi(R, P_2) = \frac{1}{2}(1 - 3 - 2 + 3) = -\frac{1}{2}$$

Enfinement, $p_F(R) = \frac{9}{2}P_0 + \frac{5}{2\sqrt{5}}P_1 - \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{4}(-X^2 + 5X + 5)$

c) Par définition de $d(R, F)$, comme $\|R - P\|^2 = \sum_{i=0}^3 [x_i - P(i)]^2$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$d(R, F)^2 = (\inf\{\|R - P\| \mid P \in F\})^2 = \inf\{\|R - P\|^2 \mid P \in F\} = \inf \Sigma$$

D'après les résultats sur la distance d'un point à un sous-espace vectoriel, Σ a un minimum, qui est atteint de manière unique pour $S = p_F(R)$ projeté orthogonal de R sur F déterminé à la question précédente.

Exercice 3

1) ${}^t S = {}^t({}^t A A) = {}^t A ({}^t A) = {}^t A A = S$, donc S est symétrique.

Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable : quitte à les compter avec multiplicité, elle a donc n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Soit $X \neq 0$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de S : $SX = \lambda X$. Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^t X S X &= \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2 \\ &= {}^t X {}^t A A X = {}^t (A X) (A X) = \|A X\| \geq 0 \end{aligned}$$

Or $\|X\| > 0$, donc $\lambda \geq 0$. En conclusion,

$S = {}^t A A$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont réelles positives.

2) S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres :

$$S = P D P^{-1} = P D ({}^t P) \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Comme les λ_i sont positifs, posons $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$. Ainsi $D_1^2 = D$, et bien sûr ${}^t D_1 = D_1$.

Par conséquent, $S = P D_1^2 ({}^t P) = P D_1 {}^t D_1 P = (P D_1) ({}^t P D_1)$

et la matrice $A = {}^t(PD_1)$ convient. Cette matrice est inversible si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont non nulles, c'est-à-dire si et seulement si S est inversible