Devoir de Mathématiques numéro 5.5

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.
On définit l'application $(A, B) \mapsto (A|B)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^t B)$$

1) Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire.

2) On note Φ la norme associé au produit scalaire $(.|.)$.
Soit U une matrice orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.

3) On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ \middle|\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Donner une base de $F^\perp$.

c) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F.

Exercice 2

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^3 \qquad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$$

1) Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base orthonormée pour le produit scalaire précédent (admis) suivante

$$P_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)$$

Soit $(x_0, \ldots, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. On considère des sommes

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} [x_i - P(i)]^2 \ \middle|\ P \in F \right\}$$

a) Montrer qu'il existe un polynôme R, et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, 3\} \qquad R(i) = x_i$$

b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.

c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce polynôme.

Exercice 3

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^t\!AA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont réelles positives.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t\!AA$. Dans quel cas A est-elle inversible ?