Lycée La Prat's
Classe de PT

Pour le vendredi 27 janvier

Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (CCP MP 2015)

1) Soit p la projection orthogonale sur H. Par construction, $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $H^\perp = \mathrm{Vect}\,(u)$. Donc, d'après le théorème de la distance à un sous-espace vectoriel,

$$\mathrm{d}(x, H) = \|x - p(x)\| = \|q(x)\|$$

Or, comme $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(u)$,

$$q(x) = (x|e_1)e_1 = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$$

Finalement,

$$\boxed{\mathrm{d}(x, H) = \|\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}}$$

Un calcul d'homogénéité permet de contrôler un peu : $(x|u)$ est homogène à une distance au carré, et $\|u\|$ à une distance, donc on trouve une distance.

2) a) D'après le cours, Tr est une forme linéaire non nulle. Donc son noyau $\boxed{H = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \text{ est un hyperplan}}$

Déterminer $H^\perp$ est une question a priori un peu délicate : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est vaste. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 1 : donc trouver une vecteur (i.e. une matrice) non nul suffira.

On remarque que,

$$\forall M \in H = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}\,, \qquad (I_n|M) = \mathrm{Tr}\,({}^tI_nM) = \mathrm{Tr}\ M = 0$$

Donc $I_n \in H^\perp$, puis $\mathrm{Vect}\ I_n \subset H^\perp$.
De plus, comme H est un hyperplan, $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$.
Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{H^\perp = \mathrm{Vect}\ I_n}$

b) D'après 3)b), $H = H^{\perp\perp} = (\mathrm{Vect}\ I_n)^\perp$, donc d'après 3)a), avec $u = I_n$,

$$(M, H) = \frac{|(M|u)|}{\|u\|} = \frac{|(M|I_n)|}{\|I_n\|} = \frac{|(M|u)|}{\|u\|}$$

Or $(M|I_n) = \mathrm{Tr}\,(M)$ et $\|I_n\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^tI_nI_n)} = \sqrt{n}$, d'où

$$\boxed{\mathrm{d}(M, H) = \frac{|\ \mathrm{Tr}\ M|}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 2 (d'après E3A PC 2014)

1) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad A_\theta^k = A_{k\theta}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_\theta^{k+1} &= A_{k\theta}A_\theta = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta - \sin k\theta\cos\theta \\ \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  D'après les formules de trigonométrie. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad A_\theta^k = A_{k\theta}}$

Géométriquement, A_θ est la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) dans $\mathbb{R}^2$. Donc A_θ^k est la composée de k fois la rotation d'angle θ.
Ainsi, ce résultat signifie que $\boxed{\text{Composer } k \text{ fois la rotation d'angle } \theta \text{ donne la rotation d'angle } k\theta}$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $I_n = {}^tI_n$.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie : $({}^tB)^k = {}^t(B^k)$. De plus ${}^tB^tA = {}^t(AB)$.
  Par conséquent $({}^tB)^{k+1} = {}^tB({}^tB)^k = {}^tB^t\left(B^k\right) = {}^t(B^{k+1})$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)}$

3) $A_\theta \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ (${}^tA_\theta A_\theta = I_2$) donc $A_\theta^{-1} = {}^tA_\theta$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$A_\theta^{-k} = (A_\theta^{-1})^k = ({}^tA_\theta)^k = {}^t(A_\theta)^k$$

Or d'après 1), $A_\theta^k = A_{k\theta}$, et comme cosinus est paire et sinus imparie ${}^tA_{k\theta} = A_{-k\theta}$. D'où $A_\theta^{-k} = A_{-k\theta}$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ A_\theta^k = A_{k\theta}}$

4) Cherchons $M = A_\theta$ telle que $M^p = A_{p\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\pi/2}$.

Choisissons par exemple $\theta = \dfrac{\pi}{2p}$ et donc

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2p}\right) \end{pmatrix}}$$

D'après 1), $M^p = A_\theta^p = A_{p\theta} = A_{\pi/2}$ donc convient.

Exercice 3

- ${}^tMM = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$ donc $\boxed{M \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})}$.
- $\det(M) = 1$ donc $\boxed{M \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ et } u \text{ est une rotation}}$

- Axe de la rotation : Soit $E_1 = \text{Ker}\,(I_3 - M)$.

$$X \in E_1 \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 3y+3z & = & 0 \\ 3y+3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \end{array}\right. \iff X \in \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Donc $E_1 = \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ainsi

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur portant et orientant l'axe de la rotation}}$$

- Angle θ de la rotation : Comme $\text{Tr}\,(M) = 2 = 1 + 2\cos\theta$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}}$.

Cherchons le signe de θ. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $MX = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis

$$\det(e_1, x, u(x)) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-2-1) > 0$$

Donc, *lorsque l'axe est orienté par* e_1, $\theta = +\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ est une rotation d'axe porté par } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et d'angle } +\frac{\pi}{3}}$

Exercice 4 (D'après BCE 2013 et Banque PT)

Remarque culturelle : f^* s'appelle l'adjoint de f. En quelque sorte, l'opération $f \mapsto f^*$ sur les endomorphisme correspond à la transposition sur les matrices. Ainsi, $f \in \mathscr{O}(E) \iff f^* = f^{-1}$, et f symétrique si $f^* = f$ (et dans ce cas, f est diagonalisable dans une base orthonormée).

1) $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, donc $\boxed{< x, y >= {}^tXY}$

2) **a)** Dans la base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad < f(x), y >= {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX({}^tAY) =< x, f^*(y) >$$

b) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x), y >=< x, g(y) >$. Montrons que $g = f^*$.

$$\forall (x,y) \in E^2 < x, g(y) >=< f(x), y >=< x, f^*(y) >$$

Donc

$$\forall (x,y) \in E^2 < x, (g - f^*)(y) >=< x, g(y) > - < x, f^*(y) >= 0$$

Ainsi, $\forall y \in E$, $(g - f^*)(y) \in E^\perp = \{0\}$: $(g - f^*)(y) = 0$.
Donc $g - f^* = 0$, c'est-à-dire $g = f^*$.
Conclusion : $\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ vérifiant } \forall (x,y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f^*(y) >}$

3) **a)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Par définition, $p(x) \in \text{Im } p$, et comme p est un projecteur, $y - p(y) \in \text{Ker } p$. De plus, p est un projecteur orthogonal, donc $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$.
Ainsi, $< p(x), y - p(y) >= 0$, puis en développant :

$$\boxed{< p(x), y >=< p(x), p(y) >}$$

Toujours la même idée : on passe tout du même coté pour se ramener à « ... = 0 ».

b) Par symétrie des rôles joués par x et y, nous avons aussi

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad < x, p(y) >=< p(y), x >=< p(y), p(x) >=< p(x), p(y) >$$

D'où $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $< x, p(y) >=< p(x), y >$
D'après 2)b), $\boxed{p = p^*}$

4) **a)** Soit $x \in \text{Im } p^*$, soit $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = p^*(x')$. D'après 2)a),

$$\forall y \in \text{Ker } p \qquad < x, y >=< p^*(x'), y >=< x', p(y) >=< x', 0 >= 0$$

D'où $x \in (\text{Ker } p)^\perp$.
Conclusion : $\boxed{\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme p est un projecteur $x - p(x) \in \text{Ker } p$ et donc, par définition de $y \in (\text{Ker } p)^\perp$,

$$\boxed{< x - p(x), y >= 0}$$

L'égalité précédente s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad 0 =< x - p(x), y >=< x, y > - < p(x), y >=< x, y > - < x, p^*(y) >=< x, y - p^*(y) >$$

D'où $y - p^*(y) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $\boxed{y = p^*(y)}$
Par conséquent, $y \in \text{Im } p^*$.
Ainsi nous venons de montrer $y \in (\text{Ker } p)^\perp \Longrightarrow y \in \text{Im } p^*$, i.e.

$$\boxed{(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*}$$

En combinant a) et b) nous avons donc montré $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p^*$.

c) Supposons que $p = p^*$. Alors le résultat de la question précédente s'écrit $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$ et p est un projecteur orthogonal.
Donc $\boxed{p = p^* \Longrightarrow p \text{ est un projecteur orthogonal}}$

5) Montrons que $(\text{Im } f)^\perp \subset \text{Ker } f^*$:

$$\begin{aligned} x \in (\text{Im } f)^\perp &\Longrightarrow \forall y \in \text{Im } f < x, y >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall x' \in E < x, f(x') >= 0 \\ &\Longrightarrow \forall x' \in E < f^*(x), x' >= 0 \\ &\Longrightarrow f^*(x) \in E^\perp = \{0\} \\ &\Longrightarrow x \in \text{Ker } f^* \end{aligned}$$

Donc $(\text{Im } f)^\perp \subset \text{Ker } f^*$.
Réciproquement, montrons que $\text{Ker } f^* \subset (\text{Im } f)^\perp$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f^* &\Longrightarrow f^*(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x' \in E < f^*(x), x' >= 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \forall y \in \text{Im } f, \ \exists x' \in E, \ y = f(x') \\ \text{et } < x, y >=< x, f(x') >=< f^*(x), x' >=< 0, x' >= 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow x \in (\text{Im } f)^\perp \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f^* \subset (\text{Im } f)^\perp$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp}$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg } f^* = \dim E - \dim \text{Ker } f^*$.
De plus, comme $E = F \oplus F^\perp$, $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim E - \dim(\text{Im } f)^\perp$. Ainsi

$$\boxed{\text{rg } f = \text{rg } f^*}$$

6) **a)** Le déterminant est invariant par transposition, donc

$$\chi_{f^*}(x) = \det(xI_n - {}^tA) = \det({}^t(xI_n - {}^tA)) = \det(xI_n - A) = \chi_f(x)$$

Ainsi, f et f^* ont les mêmes valeurs propres, donc en particulier $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f^*}$

b) Le vecteur u est non nul car c'est un vecteur propre. Ainsi $\dim \text{Vect } u = 1$ puis, comme $F \oplus F^\perp = E$, $\dim(\text{Vect } u)^\perp = \dim E - 1$:

$$\boxed{(\text{Vect } u)^\perp \text{ est un hyperplan}}$$

$$\begin{aligned} x \in (\text{Vect } u)^\perp \quad &\Longrightarrow \quad < f(x), u >=< x, f^*(u) >=< x, \lambda u >= \lambda < x, u >= 0 \\ &\Longrightarrow \quad f(x) \in (\text{Vect } u)^\perp \end{aligned}$$

Donc $f\Big((\text{Vect } u)^\perp\Big) \subset (\text{Vect } u)^\perp$:

$$\boxed{(\text{Vect } u)^\perp \text{ est stable par } f.}$$