Lycée La Prat's
Classe de PT

Pour le vendredi 20 janvier

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 21 de la feuille d'exercices sur la réduction.

Exercice 1

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1) Étude et tracé de Γ.

- **a)** Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t. On pourra essayer de relier x, y et t.
- **b)** Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
- **c)** Dresser le tableau des variations des fonctions x et y.
- **d)** Donner l'équation de l'asymptote de Γ.
- **e)** Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
- **f)** Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera (c'est-à-dire un point du plan correspondant à deux valeurs du paramètre t).
- **g)** Quel angle forment les tangentes à Γ au point double ?
- **h)** Tracer Γ.

2) Former une équation cartésienne de Γ. (Indication : *On pourra utiliser 1)a).*) *(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)*

3) Donner un paramétrage en polaire de Γ.

4) (5/2) Calculer l'aire de la boucle formée par Γ.

5) On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.

- **a)** Montrer que le point $M \in \Gamma$ de paramètre t appartient à Δ si et seulement si

$$vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0$$

- **b)** En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

donner la valeur de $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$.

- **c)** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

6) Soit le point $A(1,0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.

- **a)** Quel est le paramètre du point A ?
- **b)** Quelle relation vérifient t_1 et t_2 ?
- **c)** Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?
- **d)** Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox.

7) Soit S un point de paramètre t_0.

a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?

b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?

c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Exercice 2

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. Cet exercice a pour but de montrer l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral.
Le terme ellipse désigne une courbe bornée admettant dans un repère une équation du type $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$ avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1) Étant donné un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points

$$I(1, 0) \quad , \quad J\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad K\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

a) Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de centre O et d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer d et e.

b) Montrer que le cercle circonscrit à IJK est l'unique ellipse de centre O contenant les points I, J et K.

2) Soit ABC un triangle équilatéral et R le rayon de son cercle circonscrit. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de R.

3) Résoudre le système $\begin{cases} \cos(y - x) = \cos(x) \\ \cos(y - x) = \cos(y) \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $0 < x < y < 2\pi$.

4) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $R > 0$. On note O son centre.

a) Étant donné un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(R, 0)$, $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$ et $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$, avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$.

i) Calculer l'aire du triangle ABC. Dans la suite, cette aire sera notée $f(\beta, \gamma)$.

ii) (5/2) Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

b) (5/2) Montrer que l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathscr{C}$, que l'on calculera, est celle d'un triangle équilatéral.

5) Démontrer que si $\mathscr{C}$ est un cercle d'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathscr{A}_{\mathcal{T}}$, alors $\dfrac{\mathscr{A}_{\mathscr{C}}}{\mathscr{A}_{\mathcal{T}}} \geqslant \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

6) Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 1, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. Indication : *Utiliser une affinité orthogonale.*