

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

On admettra les résultats de l'exercice 2 du DL 2 sur les polynômes de Tchebychev

On définit les applications L et N de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad L(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| \quad ; \quad N(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

On considère enfin l'application φ de $\mathbb{R}[X]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \varphi(P, Q) = \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta$$

1) Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} L(P) = 0 &\iff P = 0 & ; & \quad L(\lambda P) = |\lambda| L(P) & ; & \quad L(P + Q) \leq L(P) + L(Q) \\ N(P) = 0 &\iff P = 0 & ; & \quad N(\lambda P) = |\lambda| N(P) & ; & \quad N(P + Q) \leq N(P) + N(Q) \end{aligned}$$

2) Montrer que $\gamma_n = n + 1$ vérifie : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad L(P) \leq \gamma_n N(P)$

3) Donner un exemple de polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L(Q) = \gamma_n N(Q)$. Que peut-on en déduire ?

4) Calculer $L(T_n)$.

5) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

6) Soit n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n, T_n)$ et $\varphi(T_n, T_m)$.

7) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$

Vérifier alors que, pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $|\alpha_k| \leq 2L(P)$

8) Dans cette question, l'entier n est strictement positif. Montrer que $N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1})$

9) On pose $q = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N(T_n) \leq q^n$

10) En déduire que l'on a $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad N(P) \leq q^{n+1} \sqrt{2} L(P)$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$, est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F , noté p_F le projecteur sur F , parallèlement à $F^\perp$. Enfin, si x est un vecteur de E , la distance euclidienne de x à F , notée $d(x, F)$ est le réel : $d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$.

1) Théorème de la projection orthogonale : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E . Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $d(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.

2) Cas des hyperplans : soit u un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à u , c'est à dire $H = (\text{Vect}\{u\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $d(x, H)$ en fonction de $\langle x, u \rangle$ et de $\|u\|$.

- 3) Une application : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

- Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.
- Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $d(M, H)$.

Exercice 3

Partie 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f .
- Déterminer les sous-espaces propres de f . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?
- Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.
- On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2)$.
 - Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B .
 - Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2

Dans cette partie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

- Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?
 - Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α . Quelle est sa dimension ?
 - On pose $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = (f - \alpha \text{id}_{\mathbb{R}^3})(\varepsilon_1)$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 + e_3$.
 - Montrer que ε_2 et ε_3 sont des éléments de $\text{Ker}(f - \alpha \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$, et la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$. Calculer P^{-1} . Exprimer A à l'aide des matrices B , P et P^{-1} .
- On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.
 - Calculer J^2 .
 - En déduire B^k puis A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- On considère trois fonctions u , v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S) \quad \begin{cases} u'(t) = -2u(t) + 5v(t) + 2w(t) \\ v'(t) = -u(t) + 4v(t) + 2w(t) \\ w'(t) = 2u(t) - 10v(t) - 5w(t) \end{cases}$$

- Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est un vecteur colonne que l'on précisera.
- Si $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ a pour vecteur colonne dans la base canonique $X(t)$, on écrit

$$\varphi(t) = x(t)\varepsilon_1 + y(t)\varepsilon_2 + z(t)\varepsilon_3$$

Donner le système (S_1) d'équations différentielles vérifiées par x , y et z .

- On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.
- Résoudre (S_1) avec les conditions initiales trouvées à la question précédente.
- En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

Exercice 1 (Correction de la partie A)

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.

Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P' .

Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

- 1) Déterminer les polynômes T_2 , T_3 et T_4 .
- 2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?
- 3) Étudier la parité de T_n .
- 4) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
- 5) Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$
- 6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.
 - a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos \theta) = 0$?
 - b) Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$. Conclure.
- 7) Déterminer les racines de T'_n .

Solution.

- 1) • $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
 • $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
 • $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
- 2) Récurrence forte : montrons que

$$\mathcal{H}(n) : \quad \forall k \leq n \quad \deg T_k = k \text{ et son coefficient dominant est } a_k^{[k]} = 2^{k-1}$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$ est vraie puisque $T_1 = X$ de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Or $\deg(XT_n) = n+1$ et $\deg(T_{n-1}) = n-1$ d'après $\mathcal{H}(n)$.
 Ainsi $\deg(T_{n+1}) = n+1$, et le coefficient dominant vient de $2XT_n$ uniquement. Il vaut le double de celui de T_n , donc $a_{n+1}^{[n+1]} = 2a_n^{[n]} = 2^n$. Par conséquent, $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}.}$

- 3) Le produit de deux polynômes impairs est pair, et le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair.

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie car $T_0 = 1$ est paire et $T_1 = X$ est impair.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie.
 Le polynôme $2XT_{2n+1}$ est pair comme produit de deux polynômes impairs, et T_{2n} est pair. Donc T_{2n+2} est pair comme somme de polynômes pairs.
 Le polynôme $2XT_{2n+2}$ est impair comme produit d'un polynôme impair et d'un polynôme pair, et T_{2n+1} est impair. Donc T_{2n+3} est impair comme somme de polynômes impairs.
 Ainsi $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad T_n \text{ a la parité de } n.}$

- 4) ★ $T_n(1)$: La suite $(T_n(1))$ vérifie la relation de récurrence $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$ avec pour premier termes $T_0(1) = T_1(1) = 1$. On peut donc résoudre à l'aide des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Sinon, la récurrence est rapide :

$$\mathcal{H}(n) : \quad \forall k \leq n \quad T_k(0) = 1$$

- $\mathcal{H}_0$ est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors $T_{n+1}(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad T_n(1) = 1}$

- ★ $T_n(-1)$: Par parité, $T_{2n}(-1) = T_{2n}(1) = 1$ et $T_{2n+1}(-1) = -T_{2n}(1) = -1$. Donc $\boxed{T_n(-1) = (-1)^n}$.

- ★ $T_n(0)$: Par parité, $\boxed{T_{2n+1}(0) = 0}$. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad T_{2n}(0) = (-1)^n$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors

$$T_{2n+2}(0) = 2 \times 0 \times T_{2n+1}(0) - T_{2n}(0) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad T_{2n}(0) = (-1)^n}$

- 5) On note $(\mathcal{P})$ la propriété suivante pour une suite (P_n) de polynômes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

- ★ Unicité : Soit (P_n) et (Q_n) deux suites de polynômes vérifiant $(\mathcal{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) = Q_n(\cos \theta) \implies \forall x \in [-1, 1] \quad P_n(x) - Q_n(x) = 0$$

Ainsi $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul : $P_n - Q_n = 0$. D'où l'unicité.

- ★ (T_n) vérifie la propriété. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad \forall k \leq n \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie car $\cos(0) = 1$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

En conclusion, $\boxed{T_n \text{ est le seul polynôme qui vérifie } (\mathcal{P})}$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

- 6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.

- a) Il suffit de résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$:

$$T_n(\cos \theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \theta = \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right]$$

Donc pour $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente, $T_n \left(\cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right) = 0$, c'est-à-dire $x_k = \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right)$ est racine de T_n .

De plus, $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in]0, \pi]$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, et le cosinus est bijectif de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Ainsi, les réels $(x_0, \dots, x_{n-1})$ sont tous distincts et dans $[-1, 1]$.

Or le polynôme T_n est de degré n , il a donc au plus n racines. Ainsi

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

7) Si $n = 0$, $T'_0 = 1$; et si $n = 1$, $T'_1 = 1$. Supposons désormais $n \geq 2$.

La relation de la question 5) est vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et les fonctions sont dérivables : dérivons-la.

$$-\sin \theta T'_n(\cos \theta) = -n \sin(n\theta)$$

Or $\sin(n\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De même qu'en 6)b), les $x'_k = \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right)$ sont $n-1$ réels tous distincts de $[-1, 1]$ lorsque $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

De plus, $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \neq 0$ si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, donc

$$-\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) T'_n \left(\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) = -n \sin(k\pi) = 0 \implies T'_n(x'_k) = 0$$

Ainsi, $(x'_1, \dots, x'_{n-1})$ sont des racines de T'_n . Or $\deg T'_n = (\deg T_n) - 1 = n - 1$, donc ce sont les seules.

□