Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (PT A 2011)

Partie 1

1) Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible est que $\boxed{\det A \neq 0}$.

Comme $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$, $\boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$

2) On sait que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\widetilde{A}$$

où $\widetilde{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

Dans le cas 2×2, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, cette formule s'écrit : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On applique cette formule aux trois cas proposés. On trouve :

$$\boxed{A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ;\ A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} ;\ A_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$;

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Par conséquent, $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont deux entiers. Or $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$, donc est un entier qui peut s'écrire comme l'inverse d'un entier. : les seules valeurs possibles sont $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Donc A est inversible en tant que matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et en inversant A on trouve $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

Or $\det(A) \in \{-1, 1\}$ donc $\dfrac{1}{det(A)}$ est entier, par conséquent $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } \det(A) \in \mathbb{Z}^\times.}$

4) Soit $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$. tels que $\det(A_4) = 5 - bc = 1$. C'est-à-dire tels que $bc = 4$. Les seules possibilités sont donc

$$\boxed{\{(1,4), (2,2), (4,1), (-1,-4), (-2,-2), (-4,-1)\}}$$

Partie 2

1) L'entier p est non nul, donc supérieur ou égal à 1 : $p - 1 \in \mathbb{N}$, et on peut écrire A^{p-1} sans hypothèse sur A. Par définition,

$$A^{p-1}A = AA^{p-1} = A^p = I_2$$

Donc, comme $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau, $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = A^{p-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}).}$

D'après 1.3), $\boxed{\text{les valeurs possibles de } \det A \text{ sont } -1 \text{ et } 1.}$

2) $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I_2$, donc $\boxed{A^{-1} \in C_2(\mathbb{Z})}$.

Par définition, $h(A^{-1})$ est le plus petit entier q vérifiant $(A^{-1})^q = I_2$, donc $h(A^{-1}) \leqslant p = h(A)$. En appliquant ce résultat à A^{-1}, on trouve $h((A^{-1})^{-1}) \leqslant h(A^{-1})$. Or $(A^{-1})^{-1} = A$, donc $\boxed{h(A) = h(A^{-1})}$.

3) On peut remarquer que $\lambda = 0$ nous donne tout de suite $\chi_A(0) = \det(A)$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda + \det(A)$$

Ce résultat reste vrai pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, mais aussi sous la forme suivante dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \mathrm{Tr}\,(A)(-\lambda)^{n-1} +$ [autres coeff] $+ \det(A)$

Exercice 2 (Ecricome ECS 2009)

1) $\forall t \in [0, +\infty[, 1 + x^2 e^{2t} \geqslant 0$, donc il reste à étudier la convergence de l'intégrale.

Soit $x \neq 0$ fixé. La fonction $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, et en $+\infty$

$$e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \sim e^{-2t}\sqrt{x^2 e^{2t}} = |x| e^{-t}$$

Donc, d'après le critère des exponentielles, l'intégrale $f(x)$ converge. Pour $x = 0$, $\boxed{f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + (-x)^2 e^{2t}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\, \mathrm{d}t = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) $\forall (x,t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \qquad x^2 e^{2t} \leqslant 1 + x^2 e^{2t} \leqslant 1 + x^2 e^{2t} + \left(\dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = \left(x e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2$

Donc en prenant la racine, sachant que $x e^t \geqslant 0$ et $x e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x} \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{\forall (x,t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad x e^t \leqslant \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leqslant x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}}$$

b) En multipliant par e^{-2t} l'encadrement précédent, on obtient

$$\forall (x,t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad x e^{-t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leqslant x e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}$$

Ces trois fonctions (de t) sont intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le critère des exponentielles. En intégrant l'encadrement s'écrit

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}}$$

Donc par encadrement $(f(x) - x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, ainsi $f(x) = x + o(1)$ au voisinage de $+\infty$: $\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote d'équation } y = x \text{ au voisinage de } +\infty.}$

3) Soit $A > 0$. Montrons que f est continue sur $[-A, A]$. Soit $h(x,t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[-A, A]$.
- $\forall x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = e^{-2t}\sqrt{1 + A^2 e^{2t}} = h(A,t)$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+$ (1)) et

$$\forall (x,t) \in [-A, A] \times \mathbb{R}_+, \qquad |h(x,t)| = \left|e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\right| \leqslant e^{-2t}\sqrt{1 + A^2 e^{2t}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est définie et continue sur $[-A, A]$.

Or ce résultat est vrai pour tout $A > 0$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \bigcup_{A>0} [-A, A] = \mathbb{R}.}$

On aurait pu montrer directement $\mathscr{C}^1$ en fait. Reprenons un $A > 0$.

Préliminaires : Étudions $(x, t) \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$ sur $[-A, A] \times \mathbb{R}_+$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé.

La fonction $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$ est impaire et dérivable sur $[-A, A]$, avec $g'(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2 e^{2t})^{3/2}} > 0$.

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0	A
$g'(x)$	$+$	
g	0	$g(A)$

Ce tableau (et la parité de g) nous prouve que

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times \mathbb{R}_+ \qquad \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}} \right| = |g(x)| \leqslant g(A) = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 e^{2t}}}$$

De plus, pour t au voisinage de $+\infty$, $g(A) = \dfrac{A}{\sqrt{1 + A^2 e^{2t}}} \sim e^{-t}$.

Théorème de dérivation :

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-A, A]$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$.
- $\forall x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{A}{\sqrt{1 + A^2 e^{2t}}}$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+$ d'après les préliminaires (équivalente à e^{-t}) et, toujours d'après les préliminaires,

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times \mathbb{R}_+, \qquad \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}} \right| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 e^{2t}}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [-A, A] \text{ et } f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}} \, \mathrm{d}t.}$$

La dérivée f' est du signe de f donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$

4) **a)** Soit $x > 0$. $t \mapsto x e^t$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme ($x \neq 0$) de $\mathbb{R}_+$ dans $[x, +\infty[$ ($x > 0$). On peut donc effectuer le changement de variable $u = x e^t$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \, \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2} \sqrt{1 + u^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \boxed{x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} \, \mathrm{d}u}$$

De même $\boxed{f'(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2}} \, \mathrm{d}u}$.

b) En dérivant l'expression obtenue au 4)a), il vient

$$f'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{2}{x}f(x) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation différentielle } xy' - 2y = -\sqrt{1+x^2}.}$

c) La fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

En 0, $\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \sim u\ln u \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ donc est prolongeable par continuité, donc intégrable.

En $+\infty$, $u^{1,5}\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{\ln u}{u^{0,5}} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ donc à partir d'un certain t_0, $\left|u^{1,5}\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant 1$ donc

$$\left|\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{u^{1,5}}$$

Le majorant étant intégrable d'après Riemann, la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \sim \dfrac{1}{u^2}$ donc est intégrable. Soit $x>0$ et $A>x$.

$$\int_x^A \frac{1}{u}\times\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$$

Or $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \sim \dfrac{\ln A}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et toutes les fonctions sont intégrable, donc lorsque $A \to +\infty$

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u}$$

Dans une copie, on attend au minimum que vous disiez $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \sim \dfrac{\ln A}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$

d) La fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0]{} I$, ce qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = I + o(1)$.
Ainsi, en combinant l'expression de f' trouvée en 4)a) et l'égalité obtenue en 4)c), il vient

$$f'(x) = -\frac{x\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + xI + o(x)$$

Donc $\dfrac{f'(x)}{-x\ln x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{I}{\ln x} + o(\dfrac{1}{\ln x}) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, ce qui signifie $\boxed{f'(x) \sim -x\ln x}$.
Les petits o s'intègrent : $f'(x) = -x\ln x + o(-x\ln x)$ donc

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x u\ln u\,\mathrm{d}u + o(\int_0^x u\ln u\,\mathrm{d}u)$$

Or $\displaystyle\int_0^x u\ln u\,\mathrm{d}u = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1/2) \sim \frac{x^2}{2}\ln x$. D'où $\boxed{f(x) - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{x^2}{2}\ln x.}$

Exercice 3

Soit $h(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$.

1) Il faut que $\forall t \in]0,1[$, $(1-x^2t) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in [-1,1]$.

Pour tout $t \in]0,1[$ fixé, $x \mapsto h(x,t)$ est paire, il suffit donc de l'étudier sur $[0,1]$.

Pour $x = 1$ $h(1,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{1}{1-t}$ qui n'est pas intégrable en $t = 1$.

Soit $x \in]-1,1[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$, et

$$h(x,t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad h(x,1-u) = \frac{1}{\sqrt{(1-u)u(1-x^2+x^2u)}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{u}}$$

Or $1/\sqrt{t}$ intégrable en 0 d'après Riemann, donc $h(x,.)$ intégrable. Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f =]-1,1[}$

2) Soit $A \in]0,1[$.

- $\forall t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$.
- $\forall x \in [-A,A]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$.
- Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-A^2t)}} = h(A,t)$. La fonction φ est **intégrable sur** $]0,1[$ (1)) et

$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times]0,1[, \qquad 0 \leqslant h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-A^2t)}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est définie et continue sur $[-A,A]$.

Or ce résultat est vrai pour tout $A > 0$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \bigcup_{0<A<1} [-A,A] =]-1,1[.}$

3) *Le principe est de se débarrasser de ce qui gêne pour le calcul sans aider à tendre vers $+\infty$. Typiquement, ici, $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Le but est d'obtenir un minorant (pour pousser vers $+\infty$) calculable.*

Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $t \in]0,1[$, $t \leqslant 1$ et $1 - x^2t \leqslant 1-t$ donc en passant aux inverses

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1(1-x^2t)(1-x^2t)}} = \frac{1}{1-x^2t}$$

En intégrant entre 0 et 1 il vient

$$f(x) = \int_0^1 h(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{1}{1-x^2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x^2}\ln(1-x^2t)\right]_0^1 = -\frac{1}{x^2}\ln(1-x^2)$$

Or $\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2) = +\infty$ donc par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty}$