Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Les parties 1 et 2 sont très largement indépendantes.
On désigne par n un entier naturel strictement supérieur à 1 et H l'un des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{M}_n(H)$ l'anneau des matrices carrées de dimension n, à coefficients dans H et on désigne par I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(H)$.

Partie 1

1) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.

2) Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$; $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\} = \mathbb{Z}^\times$ (les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}$).
Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c et d.
On notera désormais $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ constitué des matrices M telles que $\det(M) = 1$ ($SL_2(\mathbb{Z}) = \det^{-1}(\{1\})$).

4) Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Partie 2

On désignera par $C_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p non nul vérifiant $A^p = I_2$.
Pour chaque matrice A de $C_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel q non nul tel que $A^q = I_2$.
On le note $h(A)$, il est appelé l'ordre de la matrice A.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $C_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1) Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. En déduire les valeurs possibles de $\det A$.

2) Vérifier que $A^{-1} \in C_2(\mathbb{Z})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.

3) Exprimer $\chi_A(X) = \det(A - \lambda I_2)$ en fonction de $\mathrm{Tr}\,(A)$ et de $\det(A)$.

(La suite de l'épreuve sera vue en exercice)

Exercice 2 (Ecricome ECS 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f.

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) Montrer que $\qquad \forall (x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x>0$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est continue puis $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) **a)** Soit $x>0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f. Faire de même pour f'.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et que la fonction $u \mapsto \dfrac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 3

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Indication : *On pourra comparer* $\sqrt{1-x^2t}$ *et* $\sqrt{1-t}$.