Devoir de Mathématiques numéro 3.5

Correction

Exercice 1 (PT 2008, B partie II)

1) Pour les 5/2 : ce sont des matrices symétriques réelles donc diagonalisables.

À la main :

- f : $\chi_f(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = -(\lambda+1)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.
  Donc la seule valeur propre pouvant potentiellement poser problème est $\lambda = -1$. Déterminons $E_{-1}(f)$.
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A_f + I_3) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + y = 0$$
  Donc $\dim E_{-1}(f) = 2$ et est égale à la multiplicité. Ainsi, $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$
- g : $\chi_g(\lambda) = \det(A_g - \lambda I_3) = (1-\lambda)\Big(\Big(\dfrac{3}{2} - \lambda\Big)^2 - \dfrac{1}{4}\Big) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)\Big)$.
  Donc la seule valeur propre pouvant potentiellement poser problème est $\lambda = 1$. Déterminons $E_1(g)$.
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A_g - I_3) \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0$$
  Donc $\dim E_1(g) = 2$ et est égale à la multiplicité. Ainsi, $\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$

2) $A_f A_g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A_g A_f$. Donc $\boxed{\text{les endomorphismes } f \text{ et } g \text{ commutent.}}$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A_f - I_3) \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

Donc $\boxed{E_1(f) = \mathrm{Ker}\,(A_f - I_3) = \mathrm{Vect}\,((1,1,0))}$. L'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1 est $E_1 \backslash \{0\}$ *(un vecteur propre est non nul)*.

Pour vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g, il suffit de le vérifier pour $(1,1,0)$:

$$A_g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\text{les vecteurs de } E_1 \backslash \{0\} \text{ sont des vecteurs propres de } g \text{ pour la valeur propre 1.}}$

4) Reprenons le calcul où nous l'avions laissé à la question 1) :

$$E_{-1}(f) = \{(x,y,z) \mid x+y=0\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(0,0,1)\right)}$$

Pour montrer qu'il est stable par g, il suffit de vérifier que $g((1,-1,0))$ et $g((0,0,1))$ sont dans $E_{-1}(f)$.

$$A_g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{E_{-1}(f) \text{ est stable par } g.}$

5) Les trois vecteurs $\varepsilon_1 = (1,1,0)$, $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$ et $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ forment par définition une base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation de f. De plus, d'après 3), ε_1 est un vecteur propre de g, et d'après les calculs effectués en 4), ε_2 et ε_3 aussi. Ainsi les matrices de f et g dans la base $\mathscr{B}'$ sont

$$D_f = \mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_g = \mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (PT A 2011)

4) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé. Comme $AX = \lambda X$, par récurrence on obtient

$$A^p X = \lambda^p X$$

Or $A^p = I_2$. Donc l'égalité précédente s'écrit $X = \lambda^p X$, que l'on peut simplifier par X, qui est non nul (c'est un vecteur propre) : $\lambda^p = 1$.

En passant au module puis en prenant la racine p-ième, on trouve que $|\lambda| = 1$.

En conclusion, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont de module 1.}}$

5) Les relations entre les coefficients (ici $-$ Tr A et det A) et les racines λ_1 et λ_2 nous donnent $\boxed{\mathrm{Tr}\ A = \lambda_1 + \lambda_2}$

Pour le prouver, on peut utiliser de façon plus naturelle un théorème de trigonalisation : sur $\mathbb{C}$, toute matrice peut se mettre sous forme triangulaire (car le polynôme caractéristique est automatiquement scindé), et dans ce cas la diagonale est constitué des valeurs propres avec leur multiplicité. Comme la trace est invariante par changement de base, on obtient le résultat voulu.

6) D'après 4) et 5), $|\,\mathrm{Tr}\ A| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| = 2$. Donc $\mathrm{Tr}\ A \in [-2,2]$.

De plus $\mathrm{Tr}\ A = a_{11} + a_{22}$ qui sont des entiers, puisque A est à coefficients entiers. Donc $\mathrm{Tr}\ A \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{Tr}\ A \in [-2,2] \cap \mathbb{Z} = \{-2,-1,0,1,2\}}$

7) D'après le devoir précédent (question 3)), $\chi_A(X) = X^2 - (\mathrm{Tr}\ A)X + \det A$.

Il y a deux possibilités pour le déterminant (question A.1), $+1$ et -1) et 5 pour la trace (question 6), $[-2,2] \cap \mathbb{Z}$), donc au total $\boxed{\text{il y a 10 polynômes caractéristiques possibles.}}$

- **a)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1}= (X-1)^2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
- **b)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 - 2X - 1}$: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$: pas de modules 1, $\boxed{\text{cas exclu}}$
- **c)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 - X + 1}$: $\lambda_1 = -j = -e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = -j^2$.
- **d)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 - X - 1}$: $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: pas de modules 1, $\boxed{\text{cas exclu}}$
- **e)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 + 1}$: $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
- **f)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 - 1}$: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
- **g)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 + X + 1}$: $\lambda_1 = j$ et $\lambda_2 = j^2$.
- **h)** $\underline{\chi_A(X) = X^2 + X - 1}$: $\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$: pas de modules 1, $\boxed{\text{cas exclu}}$

i) $\underline{\chi_A(X) = X^2 + 2X + 1} = (X+1)^2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

j) $\underline{\chi_A(X) = X^2 + 2X - 1}$: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$: pas de modules 1, $\boxed{\text{cas exclu}}$

8) Dans les cas a), c), e), f) et g), le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, par conséquent $\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

Traitons le cas i), le cas a) étant analogue.

On suppose que A n'est pas diagonalisable. Elle est trigonalisable et semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \neq 0$$

Donc $A^p = I_2$ est semblable à $T^p = \begin{pmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$, ce qui est absurde.

L'ordre des matrices A dans chacun des cas est le même que celui de la matrice D associé. Ainsi il vient

a) 2 c) 6 e) 4 d) 2 g) 3 i) 1

9) Le ppcm p_2 des ordres précédent conviendra : si A est d'ordre $p | p_2$, alors $p_2 = pq$ et

$$A^{p_2} = (A^p)^q = I_2^q = I_2$$

Ici, $\boxed{p_2 = 12}$