Devoir de Mathématiques numéro 3.5

Exercice 1

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les matrices A_f et A_g sont diagonalisables (pour 5/2 : sans calculs).

2) Vérifier que les endomorphismes f et g commutent.

3) Déterminer tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1. Vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g.

4) Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1. Vérifier que ce sous-espace est stable par g.

5) Construire une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de diagonalisation commune à f et g.

Plus généralement, si f et g commutent et sont diagonalisables (resp trigonalisables), alors ils sont diagonalisables dans une même base. C'est une conséquence de l'exercice 6 de la feuille d'algèbre linéaire, où l'on a montré que $f \circ g = g \circ f \Longrightarrow g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$.

Exercice 2

Suite de l'exercice 1 du DL 3

4) On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres, éventuellement confondues, de A. Montrer que λ_1 et λ_2 sont de module 1.

5) Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace $\text{Tr } A$ de A.

6) En déduire que $\text{Tr } A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

7) Vérifier qu'il y a 10 polynômes caractéristiques possibles ; déterminer dans chacun des cas les valeurs propres de A. En utilisant alors 4), vous exclurez 4 de ces cas.

8) Dans les six cas restants, montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et déterminer l'ordre de A.

9) En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier naturel non nul p_2 tel que

$$\forall A \in C_2(\mathbb{Z}) \qquad A^{p_2} = I_2$$