Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) **a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

c) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 1+t$ et en déduire que $\ell = 0$.

2) (5/2) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

3) On se propose ici de calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.$$

b) Vérifier l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}.$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\,u$.

d) En conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

e) Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

Exercice 2

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

Partie 1 (Résultats préliminaires)

On se propose de trouver les fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x+y) = h(x) + h(y)$.

1) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x)+h(y)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t = yh(x) + H(y)$.

b) En déduire que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

c) Exprimer de même la quantité $xh(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d) Justifier alors que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = xh(1)$. Une telle fonction répond-elle à la question ?

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

b) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $u : J \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose, pour tout $x \in J$,

$$F_1(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée. De plus, si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que F_1 est aussi $\mathscr{C}^1$.

3) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et soit (a,b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^b g(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Partie 2 (Étude d'une équation fonctionnelle)

On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose qu'il existe une telle fonction f, non identiquement nulle. Soit a tel que $f(a) \neq 0$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) **a)** Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

Quelle est nécessairement la parité de f ?

4) On pose $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$. Déduire de ce qui précède que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_\lambda) \qquad z'' + \lambda z = 0$$

5) Étude de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_\lambda)$: $\quad z'' + \lambda z = 0$.

a) On suppose $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

i) Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) En déduire que, dans ce cas, il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\sin(\mu x)$, puis justifier que $A = \dfrac{2}{\mu}$.

b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

i) Donner de même une base des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) En déduire que, dans ce cas, il existe $A' \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A' \operatorname{sh}(\mu x)$, puis justifier que $A' = \dfrac{2}{\mu}$.

c) Si $\lambda = 0$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.

Partie 3 (Étude d'une fonction)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ lorsque ceci a un sens.

1) Justifier que $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ est inclus dans le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et donner l'expression de f'.

3) **a)** Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction ln au voisinage de 1.

b) Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + o_1(1)$.

c) En déduire que les fonctions f' et $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.

4) <u>Étude de f au voisinage de 1</u> :

a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

b) En déduire que, pour tout $x \in]\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1+\alpha}[\backslash\{1\}$, $|f(x) - \ln(1+x)| \leqslant \dfrac{3}{2}|x^2 - x|$, puis trouver la limite de f en 1.

c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f ce prolongement. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$. On énoncera le théorème utilisé.

5) <u>Étude de f au voisinage de 0</u> :

a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

b) On note encore f ce prolongement. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

6) <u>Étude de f au voisinage de $+\infty$</u> : Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.

7) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

8) Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

9) Tracer la courbe représentative de f.

10) Calcul d'une intégrale.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que, $\forall (x,y) \in]0,1[^2$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u$ et en déduire que $f(y) - f(x) = \displaystyle\int_x^y \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.