Devoir de Mathématiques numéro 2.5

Correction

Exercice 1 (PT C 2011 — partiel)

1) a) La fonction F définie sur $[e, +\infty[$ par $F(t) = -\frac{1}{\ln t}$ est une primitive de f . Ainsi,

$$\int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^2} = [F(t)]_e^X = -\frac{1}{\ln X} + 1 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$ converge, et sa valeur est 1.

b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est continue par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\forall t \in [e, +\infty[\quad \frac{1}{t^2(\ln t)^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Et d'après le critère de Riemann, l'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ converge au voisinage de $+\infty$ ($2 > 1$).

Donc, par majoration, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2(\ln t)^2}$ est convergente.

2) a) $h > 0$ donc, par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = 0$

b) D'après a), $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_0 \in]1, +\infty[/ \forall t \geq t_0 \quad \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < \varepsilon$$

De plus, dès que $t > 1$, $\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ est bien défini et strictement positif.

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = 1$, il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$, $0 < \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < 1$.

c) Soit t_0 comme au b). Soit $t \geq t_0$ quelconque. Alors, t^{1+h} est bien défini et strictement positif. Ainsi, d'après b),

$$0 < \frac{1}{t^{1+h}} \times \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}$$

Conclusion : $\forall t \geq t_0 \quad 0 < \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}$.

d) D'après le critère de Riemann, l'intégrale de $\frac{1}{t^{1+h}}$ converge au voisinage de $+\infty$ ($1 + h > 1$).

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sur $[t_0, +\infty[$.

Donc, d'après c), par majoration, l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est convergente.