Devoir de Mathématiques numéro 2.5

Exercice 1

1) **a)** Déterminer une primitive de $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$?

b) L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2(\ln t)^2}$ est-elle convergente ?

2) Soient h et β deux réels, avec $h > 0$.

a) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geqslant t_0$, $0 < \dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < 1$.

c) On pose, dans ce qui suit, $\alpha = 1 + 2h$. Déduire du b) que, pour $t \geqslant t_0$,

$$0 < \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}$$

d) L'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est-elle convergente ?