

Devoir de Mathématiques numéro 1

$\boxed{\text{Correction}}$

Exercice 1 (Centrale 1 TSI 2010)

Partie 1 (Fonctions homographiques)

1) a) i) À l'intérieur de son disque de convergence $]-R, R[$, la série entière y est $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme. On dérive puis on remplace dans (E_a) : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}(x-a)y''+2y' &= (x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} an(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n+1)na_{n+1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1}\\ &= -2aa_2 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\Big[n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n\Big]x^{n-1}\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient donc

$$\begin{cases} -2aa_2+2a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2 \quad n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n = 0\end{cases}$$

Après simplifications, on trouve la suite géométrique $\boxed{\forall n \geqslant 1 \ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a}}$, l'expression en fonction de n étant $\forall n \geqslant 1 \ a_n = \dfrac{a_1}{a^{n-1}}$.

pour tout $x \in]-R, R[$, $y(x) = a_0 + a_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 - a_1 a + a_1 a \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$.

On reconnaît la somme de la série géométrique :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$$

On a donc nécessairement $|x/a| < 1$, donc $R \leqslant a$.

ii) Les fonction $y(x) = a_0 - a_1 a + \dfrac{a_1 a}{1-x/a}$ sont développables en série entière sur $]-a, a[$ (car $|x/a| < 1$), et solutions de (E_a) d'après la question précédentes.

iii) L'ensemble de ces fonctions peut s'écrire $\mathscr{S}_{]-a,a[} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ avec, pour tout $x \in]-a, a[$, $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = -a + \dfrac{a}{1-x/a}$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $]-a, a[$. De plus la famille (f_1, f_2) est libre (f_2 n'est pas constante, donc pas colinéaire à f_1).

En conclusion, $\boxed{\mathscr{S}_{]-a,a[} \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (f_1, f_2).}$

De plus, (E_a) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions continues, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ où le coefficient devant y'' est non nul. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_a) \text{ sur }]-a, a[\text{ est } \mathscr{S}_{]-a,a[}.}$

b) Les fonctions $f(x) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-a}$ sont solutions de (E_a) (calcul de vérification), donc, de même qu'au a)iii) sur chacun des intervalles, $\mathscr{S}_{]-\infty,a[} = \text{Vect}\,(f_{|]-\infty,a[}, g_{|]-\infty,a[})$ et $\mathscr{S}_{]a,+\infty[} = \text{Vect}\,(f_{|]a,+\infty[}, g_{|]a,+\infty[})$.

Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$, il reste à recoller ces solutions. Or g n'a pas de limite en a, donc les solutions seront forcément de la forme $\lambda_1 f$ sur $]-\infty, a[$ et $\lambda_2 f$ sur $]a, +\infty[$.

Pour que la fonction obtenue soit continue, il faut que $\lambda_1 = \lambda_2$, et dans ce cas on trouve une fonction constante, qui est bien $\mathscr{C}^2$.

Finalement, $\boxed{\text{Les solutions de } (E_a) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions constantes.}}$

2) On considère α, β, γ et δ des réels tels que $\gamma \neq 0$. On pose pour tout x réel différent de $-\dfrac{\delta}{\gamma}$

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

a) La fonction g est une fraction rationnelle, donc $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Elle est constante ß sa dérivée est identiquement nulle, c'est-à-dire,

$$\forall x \neq -\frac{\delta}{\gamma} \qquad g'(x) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est constante si et seulement si } \alpha\delta - \beta\gamma = 0.}$

b) **i)** Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\dfrac{\delta}{\gamma}\}$,

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x + \delta - \delta) + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{-\frac{\alpha\delta}{\gamma^2} + \frac{\beta}{\gamma}}{x + \frac{\delta}{\gamma}} = u + \frac{v}{x + w}$$

Si on a posé $\boxed{u = \dfrac{\alpha}{\gamma},\ v = -\dfrac{\alpha\delta}{\gamma^2} + \dfrac{\beta}{\gamma} \text{ et } w = \dfrac{\delta}{\gamma}.}$

ii) Seul le signe de v importe : si $v > 0$, g se comporte comme $x \mapsto 1/x$ et sinon comme $x \mapsto -1/x$. Pour obtenir des conditions plus lisibles, on multiplie par $\gamma^2 > 0$ (puisque $\gamma \neq 0$). Ainsi :

- si $-\alpha\delta + \beta\gamma > 0$, g est décroissante sur $]-\infty, -\delta/\gamma[$ et sur $]-\delta/\gamma, +\infty[$.
- si $-\alpha\delta + \beta\gamma < 0$, g est croissante sur $]-\infty, -\delta/\gamma[$ et sur $]-\delta/\gamma, +\infty[$.

c) *Il faut distinguer la phase de recherche, où l'on part d'une homothétie de rapport λ et d'une translation de vecteur (x_0, y_0), et la phase de rédaction, où l'on vérifie que ce que l'on a trouvé convient bien.*

i) Soit $h : (x, y) \mapsto (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y)$ l'homothétie de rapport $\sqrt{v}$. Montrons par double inclusion que $h(\mathscr{C}) = \mathscr{D}$.

$\boxed{\subset}$
$$\begin{aligned}
(x', y') \in h(\mathscr{C}) &\implies \exists (x, y) \in \mathscr{C} / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \\
&\implies \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \text{ et } xy = 1 \\
&\implies \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{v}x, \sqrt{v}y) = (x', y') \text{ et } x'y' = vxy = v \\
&\implies x'y' = v \\
&\implies (x', y') \in \mathscr{D}
\end{aligned}$$

Donc $h(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$.

$\boxed{\supset}$ $(x', y') \in \mathscr{D} \implies x'y' = v$

Posons $x = \dfrac{1}{\sqrt{v}}x'$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{v}}y'$. Alors $h(x, y) = (x', y')$. Reprenons.

$$\begin{aligned}
&\implies xy = \frac{1}{v}x'y' = 1 \\
&\implies (x, y) \in \mathscr{C} \\
&\implies (x', y') = h(x, y) \in h(\mathscr{C})
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D} \subset h(\mathscr{C})$.

Conclusion : $\boxed{h(\mathscr{C}) = \mathscr{D}}$

ii) Soit $t : (x, y) \mapsto (x - w, y + u)$ la translation de vecteur $(-w, u)$. Montrons que $t(\mathscr{D}) = \Gamma$. Remarquons que l'équation de Γ peut s'écrire $(y - u)(x + w) = v$.

$\boxed{\subset}$ $$\begin{array}{rcl} (x,y) \in \mathscr{D} & \Longrightarrow & xy = v \text{ et } (x', y') = t(x, y) = (x - w, y + u) \\ & \Longrightarrow & (x' + w)(y' - u) = xy = v \text{ avec } (x', y') = t(x, y) \\ & \Longrightarrow & (x', y') = t(x, y) \in \Gamma \end{array}$$

Donc $t(\mathscr{D}) \subset \Gamma$.

$\boxed{\supset}$ $(x', y') \in \Gamma \implies (x' + w)(y' - u) = v$

Posons $(x, y) = t^{-1}(x', y') = (x' + w, y' - u)$. Reprenons.

$$\begin{array}{rl} \Longrightarrow & t(x, y) = (x', y') \text{ et } xy = v \\ \Longrightarrow & (x', y') = t(x, y) \text{ et } (x, y) \in \mathscr{D} \\ \Longrightarrow & (x', y') \in t(\mathscr{D}) \end{array}$$

Donc $\Gamma \subset t(\mathscr{D})$.

Conclusion : $t(\mathscr{D}) = \Gamma$. Or $\mathscr{D} = h(\mathscr{C})$ d'après i), donc $\boxed{t \circ h(\mathscr{C}) = \Gamma}$

iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \circ h(x, y) = (\sqrt{v}x - w, \sqrt{v}y + u)$. Donc $t \circ h \neq \mathrm{id}$ dès que $\sqrt{v} \neq 1$.
Montrons réciproquement que $\sqrt{v} \neq 1$ implique que $t \circ h$ est une homothétie (différente de l'identité).
Le fait que $t \circ h \neq \mathrm{id}$ est immédiat. Une homothétie h_1 de rapport λ et de centre (x_0, y_0) est définie par $(x, y) \mapsto (x_0 + \lambda(x - x_0), y_0 + \lambda(y - y_0))$.
Posons h_1 l'homothétie de rapport $\sqrt{v}$ et de centre $\left(\frac{-w}{1-\sqrt{v}}, \frac{u}{1-\sqrt{v}}\right)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} h_1(x,y) & = & \left(\frac{-w}{1-\sqrt{v}} + \sqrt{v}\Big(x + \frac{w}{1-\sqrt{v}}\Big), \frac{u}{1-\sqrt{v}} + \sqrt{v}\Big(y - \frac{u}{1-\sqrt{v}}\Big)\right) \\ & = & \left(\frac{-w + \sqrt{v}w}{1-\sqrt{v}} + \sqrt{v}x, \frac{u - \sqrt{v}u}{1-\sqrt{v}} + \sqrt{v}y\right) \\ & = & (-w + \sqrt{v}x, u + \sqrt{v}y) \\ & = & t \circ h(x, y) \end{array}$$

Donc $t \circ h = h_1$: L'application $t \circ h$ est une homothétie différente de l'identité si et seulement si $\boxed{v \neq 1}$, et dans ce cas ce sera $\boxed{\text{l'homothétie de rapport } \sqrt{v} \text{ et de centre } \left(\frac{-w}{1-\sqrt{v}}, \frac{u}{1-\sqrt{v}}\right)}$.

Plus généralement, tout composée d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ et d'une translation est une homothétie. On utilise les affixes :
Si h est l'homothétie de rapport λ et de centre ω, on a $h(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.
Si t est la translation de vecteur z_0, on a $t(z) = z + z_0$.
Donc $t \circ h(z) = z_0 + \omega + \lambda z - \lambda\omega$, qui peut se mettre sous la forme $t \circ h(z) - \omega' = \lambda(z - \omega')$, avec $\omega' = \omega + \frac{z_0}{1-\lambda}$.
Même remarque pour $h \circ t$.

d) Au 1)b) on a montré que les solutions de (E_a) sont des combinaisons linéaires de la fonction constante $x \mapsto 1$ et de $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ (sur chaque intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{a\}$). Donc g est solution de (E_a) si et seulement si g est de la forme $x \mapsto \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{x-a}$ (où les λ_i dépendent des conditions initiales).

Ainsi, g est solution de (E_a) sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ lorsque $\boxed{a = -w = -\frac{\delta}{\gamma}}$.

On remarque qu'on retrouve le domaine de définition de g. Ce qui nous donne un moyen de vérifier les calculs : la valeur interdite pour g est $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, et lors de la résolution de (E_a) c'est $x = a$.

Partie 2 (Fractions continues)

1) a) La fonction f n'est pas définie uniquement lorsque $x = \lfloor x \rfloor$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc

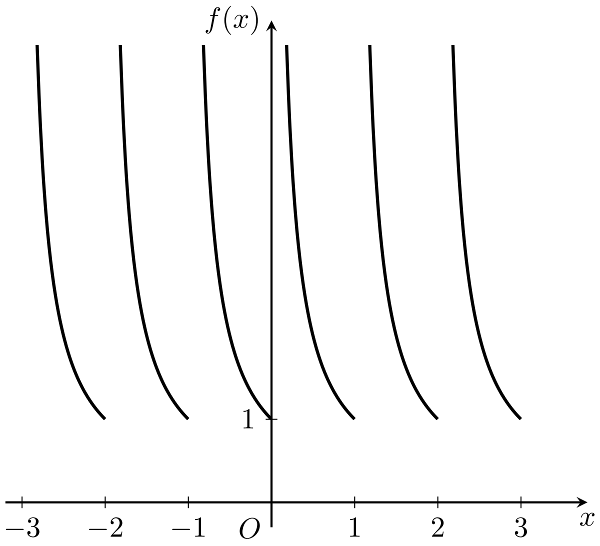
$$\forall x \in \mathscr{D}_f \qquad x+1 \in \mathscr{D}_f \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{1}{x+1-(\lfloor x \rfloor + 1)} = f(x)$$

Par suite, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est périodique de période 1.}}$

b) Soit $x \in]k, k+1[$. Par définition, $k < x < k+1$, donc $\lfloor x \rfloor = k$. Ainsi, $f(x) = \dfrac{1}{x-k}$.

Donc $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1 \text{ et } \delta = -k.}$

c) Sur chaque intervalle de la forme $]k, k+1[$ f est décroissante (translation de vecteur $(k, 0)$ de la courbe $y = 1/x$). $\lim\limits_{k^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{k^-} f = 1$.
Ainsi, $f(\mathscr{D}_f) = \text{Im } f =]1, +\infty[$.



d) Irrationnel : Raisonnons par contraposition. Soit $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x \in \mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{p}{q}$. $f(x) \neq 0$ donc $x - \lfloor x \rfloor = \dfrac{q}{p}$, et finalement $x = \lfloor x \rfloor + \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$.

En conclusion, par contraposition, $\boxed{\text{pour tout nombre } x \text{ irrationnel } f(x) \text{ est irrationnel.}}$

Rationnel : Soit $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap \mathscr{D}_f = \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$. $f(x) = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{1}{\frac{p}{q} - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{q}{p - q\lfloor x \rfloor} \in \mathbb{Q}$.

Donc $\boxed{\text{pour tout nombre } x \text{ rationnel non entier } f(x) \text{ est rationnel non entier.}}$

2) **a)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_0 \in \mathscr{D}_f$ et x_1 est bien défini.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \subset \mathscr{D}_f$.
Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad x_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ et } x_{n+1} \text{ bien défini.}}$

b) **i)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $x_0 \in \mathbb{Q}$ par hypothèse, donc $x_1 = f(x_0) \in \mathbb{Q}$ d'après 1)d). De plus, d'après 1)c), $\operatorname{Im} f =]1, +\infty[$ donc $x_1 = f(x_0) > 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  D'après 1)d), $x_{n+1} = f(x_n) \in \mathbb{Q}$ et, d'après 1)c), $x_{n+1} = f(x_n) > 1$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad x_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x_n > 1}$

Remarque : on a supposé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n était bien défini, donc $f(x_n)$ existe toujours.

ii) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{u_n}{v_n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Par définition, $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ et $v_0 \in \mathbb{N}^*$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Écrivons la division euclidienne de u_n par $v_n > 0$:

$$u_n = qv_n + v_{n+1} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant v_{n+1} < v_n \quad \text{et} \quad q = \left\lfloor \frac{u_n}{v_n} \right\rfloor$$

En divisant par $v_n > 0$, il vient $\dfrac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \dfrac{u_n}{v_n} \right\rfloor = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ par définition de u_{n+1}.

Si $v_{n+1} = 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} - \left\lfloor \dfrac{u_n}{v_n} \right\rfloor = x_n - \lfloor x_n \rfloor = 0$ et $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$ n'est pas défini, ce qui est absurde.

D'où $v_{n+1} > 0$ et $x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \dfrac{1}{v_{n+1}/u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad v_n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \dfrac{u_n}{v_n}}$

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est le reste de la division euclidienne par v_n, donc $v_{n+1} < v_n$: $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$ *(On pouvait aussi partir de $v_n > 0$ et $x_n > 1$)*

Or (v_n) est minorée par 0 d'après ii), donc convergente. Mais une suite d'entier convergente est stationnaire, ce qui est contradictoire avec la stricte décroissance de (v_n). Donc on ne peut pas supposer que x_n est bien défini lorsque $x_0 \in \mathbb{Q}$:

$\boxed{\text{Au bout d'un nombre d'étapes fini } n, \text{ on trouve } x_n \in \mathbb{Z}.}$

c) *(C'est une question de synthèse, qui n'utilise que le résultat des questions a) et b), et peut donc se faire en admettant ces résultats.)*

D'après a), $x_0 \notin \mathbb{Q}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

D'après b), $x_0 \in \mathbb{Q}$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n n'est pas défini. Donc par contraposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini implique $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Finalement,

$\boxed{x_0 \notin \mathbb{Q} \text{ est une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ soit bien défini.}}$

3) **a)** Voir TP Maple 2.

b) **i)** On trouve $a_0 = 1$ puis $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$. On peut conjecturer que $a_n = 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

ii) $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2}$.

$x_2 = f(x_1) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \lfloor 1 + \sqrt{2} \rfloor} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = x_1$.

Donc x_1 est un point fixe de la fonction f : $f(x_1) = x_1$. Ainsi, une récurrence immédiate nous montre que $\boxed{x_n = x_1 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

Par conséquent, $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \lfloor x_n \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor = 2}$

iii) La procédure nous donne $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 1$ et $a_2 = a_4 = 2$.
On conjecture une suite périodique $\boxed{a_{2n} = 2 \text{ et } a_{2n-1} = 1 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad x_{2n} = x_2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $x_1 = f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
  $x_2 = f(x_1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1-2\lfloor\frac{1+\sqrt{3}}{2}\rfloor} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = 1+\sqrt{3}$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  $x_{2(n+1)-1} = x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(1+\sqrt{3}) = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}-\lfloor\sqrt{3}\rfloor - 1} = f(x_0) = x_1$
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad x_{2n} = x_2 \quad \text{et} \quad x_{2n-1} = x_1}$

c) **i)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad p_{n-1} \in \mathbb{N} \qquad q_{n-1} \in \mathbb{N} \qquad p_n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad q_n \in \mathbb{N}^*$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Attention, il est nécessaire et fondamental que $\mathcal{H}_n$ porte aussi sur le rang $n-1$ de (p_n) et (q_n). En particulier, l'initialisation est modifiée.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: les (a_n) sont des entiers, donc p_0, p_1, q_0 et q_1 aussi. de plus a_0 est positif car x_0 l'est, et a_1 est plus grand que 1 car c'est la partie entière de $x_1 = f(x_0) \in [1, +\infty[$. Donc p_0 et q_0 sont positifs, et p_1 et q_1 strictement positifs : $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme a_{n+1} est un entier strictement positif, que p_{n-1} et q_{n-1} sont aussi des entiers strictement positifs, et que p_{n-2} et q_{n-2} sont des entiers positifs, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad p_n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad q_n \in \mathbb{N}^*}$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

ii) La suite (q_n) est strictement positive pour tout n, d'après i) et puisque $q_0 = 1 > 0$. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > a_n \geqslant 1$$

Donc $\boxed{(q_n) \text{ est strictement croissante à partir de } n = 1.}$
Par conséquence, pour tout $n \geqslant 2$, $q_n - q_{n-1} > 0$, ce qui dans les entiers implique $q_n - q_{n-1} \geqslant 1$.
En sommant, on obtient $\sum_{k=2}^{n} q_k - q_{k-1} = q_n - q_1 \geqslant n-1$. Or $q_1 = a_1 \geqslant 1$, d'où le résultat $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geqslant n.}$

iii) Soit $D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$. Montrons que la suite $(D_n)_n$ est géométrique de raison -1 : pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} D_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = -D_{n-1} \end{aligned}$$

De plus $D_1 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$.
En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = D_n = (-1)^{n-1}.}$
On peut aussi le voir avec des déterminants :

$$D_n = \det\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} = -D_{n-1}$$

.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \dfrac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{p_n + p_{n+1}\frac{1}{x_{n+1}-a_{n+1}}}{q_n + q_{n+1}\frac{1}{x_{n+1}-a_{n+1}}} = \frac{(x_{n+1}-a_{n+1})p_n + p_{n+1}}{(x_{n+1}-a_{n+1})q_n + q_{n+1}}$$

Or $-a_{n+1}p_n + p_{n+1} = p_{n-1}$ et de même pour (q_n). Ainsi $U_n = \dfrac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} = U_{n-1}$.

La suite (U_n) est donc constante, et $U_0 = x_0$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}}.}$

d) **i)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ d'après c)iii).

ii) Montrons qu'elle vérifie le critère des séries alternées.

- $q_n > 0$ donc la série est alternée.
- La suite (q_n) est croissante (c)ii)), donc $(q_n q_{n-1})$ aussi, et ainsi $\left(\dfrac{1}{q_n q_{n-1}}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.
- D'après c)ii), $q_n \geqslant n$, d'où pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{q_n q_{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{q_n q_{n-1}} = 0$.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, $\boxed{\text{la série de terme général } r_n - r_{n-1} \text{ est convergente.}}$

iii) La sériede terme général $r_n - r_{n-1}$ est convergente, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) = r_n - r_0$ converge. Donc $\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ converge.}}$

iv) C'est une conséquence du critère des séries alternée. On peut le redémontrer, en montrant que (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont deux suites adjacentes.
Puisque r est appartient à l'intervalle de bornes r_n et r_{n+1}, la longueur $|r - r_n|$ est plus petite que la longueur de l'intervalle, c'est-à-dire $|r_{n+1} - r_n| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|r - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}.}$

On a donc approché r avec une précision que l'on peut contrôler.

4) **a)** Supposons x_0 irrationnel. Alors $x_0 \neq -\dfrac{\delta}{\gamma} = -\delta \in \mathbb{Z}$, donc y_0 bien défini. Supposons de plus $y_0 = \dfrac{p}{q}$ rationnel.

$$y_0 = g(x_0) = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} = \frac{\alpha x_0 + 1 + \alpha\delta}{x_0 + \delta} = \alpha + \frac{1}{x_0 + \delta}$$

Donc $x_0 = -\delta + \dfrac{1}{y_0 - \alpha} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\text{Le nombre réel } y_0 = g(x_0) \text{ est bien défini et irrationnel.}}$

b) Par hypothèse, $x_0 > 0$ et $\delta \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{x_0 + \delta} < 1$, ainsi $\alpha \leqslant y_0 = \alpha + \dfrac{1}{x_0 + \delta} < \alpha + 1$. Puisque $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\boxed{b_0 = \lfloor y_0 \rfloor = \alpha.}$ De plus

$$y_1 = f(y_0) = \frac{1}{y_0 - \lfloor y_0 \rfloor} = \frac{1}{y_0 - \alpha} = x_0 + \delta$$

Donc, comme $\delta \in \mathbb{Z}$, $\boxed{b_1 = \lfloor f(y_0) \rfloor = \lfloor x_0 + \delta \rfloor = a_0 + \delta}$

Ainsi, $y_2 = f(y_1) = \dfrac{1}{x_0 + \delta - (a_0 + \delta)} = x_1$.
Les suites $(y_{n-1})_{n \geqslant 2}$ et $(x_n)_{n \geqslant 1}$ sont définie par la même relation de récurrence et ont même premier terme, donc sont égales.
Par suite, leurs parties entières sont égales : $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2,\ a_{n-1} = b_n.}$

5) **a)** Raisonnons par l'absurde. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta = (\delta+\alpha)^2 + 4 = n^2$.
On a $n^2 \geqslant (1+1)^2 + 4 = 8$ donc $n \geqslant 3$.
De plus, $n^2 - (\delta+\alpha)^2 = 4$ donc $(n-(\delta+\alpha))(n+\delta+\alpha) = 4$. Or $(n+\delta+\alpha) \geqslant 3+1+1 = 5$. On vient donc d'écrire 4 comme produit de deux entiers dont l'un est plus grand que 5 : c'est absurde. Par conséquent, $\boxed{\Delta \text{ n'est pas le carré d'un entier.}}$

b) On calcule le discriminant : $(\delta-\alpha)^2 + 4(\alpha\delta+1) = \delta^2 + 2\alpha\delta + \alpha^2 + 4 = \Delta > 0$. Donc retrouve donc le Δ de la question précédente : $\sqrt{\Delta}$ est irrationnel.
L'équation a deux solutions distinctes ($\Delta > 0$), $\dfrac{1}{2}(\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta})$. Or $\Delta \geqslant |\delta - \alpha|$ donc l'unique solution positive est $\boxed{z_0 = \dfrac{1}{2}(\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}).}$

c) $\dfrac{1}{z_0+\delta} = \dfrac{2}{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta} + 2\delta} = \dfrac{2(\alpha+\delta-\sqrt{\Delta})}{(\alpha+\delta)^2 - ((\delta+\alpha)^2+4)} = \dfrac{1}{2}(-(\alpha+\delta)+\sqrt{\Delta})$.
Donc $g(z_0) = \alpha + \dfrac{1}{z_0+\delta} = z_0$
On pouvait aussi remarquer que $g(x) = x \Longleftrightarrow (x^2 + (\delta-\alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq \delta)$.
Il y a souvent des questions faciles y compris en fin de sujet. Garder quelques minutes en fin d'épreuve pour les faire peut être une bonne stratégie.

d) D'après 4)b), le développement en fraction continue de $g(z_0)$ s'obtient, à partir de $n = 2$, par un décalage d'indice dans celui de z_0. Or $z_0 = g(z_0)$, donc $a_n = b_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{Le développement en fraction continue } (a_n) \text{ du nombre } z_0 \text{ est constant à partir de } n = 1.}$

e) $z_0 = \dfrac{\alpha-\delta}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\delta+\alpha}{2}\right)^2 + 1}$, donc en posant $\alpha = \delta = p \in \mathbb{N}^*$, il vient $z_0 = \sqrt{p^2+1}$.
Par conséquent, en appliquant le résultat de la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il vient
$\boxed{\text{Le développement en fraction continue de } \sqrt{p^2+1} \text{ est constant à partir de } n = 1.}$
Plus précisément, on a $a_0 = \alpha = p$, puis $a_1 = a_n = \delta + \alpha = 2p$.

Exercice 2 (PT 2010 C, partie 1)

1) **a)** f est $\mathscr{C}^\infty$ sur sont domaine de définition, et $f' = \cos$. Le tableau de variation est donc

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	1

b) La fonction f est continue, strictement monotone sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc par le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ sur son image } [-1,1].}$

c) **i)** Soit $b \in]-1,1[$, et $a = f^{-1}(b)$. Pour tout $y \in]-1,1[$, on notera $x = f^{-1}(y)$. Soit $y \neq b$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

Or pour tout $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, f est dérivable et $f'(a) \neq 0$. Donc
$\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \dfrac{1}{f'(a)}$ par continuité de f^{-1}.
Conclusion : $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1,1[.}$

ii) pour tout réel x de $]-1,1[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(f^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Car pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta \geqslant 0$ donc $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$. Ainsi $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

iii) La fonction $(f^{-1})'$ est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Donc $(f^{-1})'$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

2) a) La fonction g_α est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle est donc en particulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$.

b) D'après 1)c)ii), $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. Donc

$$\forall x \in]-1,1[\qquad g'_\alpha(x) = -\alpha \operatorname{Arcsin}'(x)\sin(\alpha \operatorname{Arcsin}(x)) = \frac{-\alpha\sin(\alpha \operatorname{Arcsin}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) On dérive g'_α.

$$\forall x \in]-1,1[\qquad g''_\alpha(x) = \frac{-\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2}\cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$$

d) $g''_\alpha(x) = \frac{x}{1-x^2}g'_\alpha(x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2}g_\alpha(x)$ d'où le résultat.

e) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de degré n. Le polynôme P est solution de l'équation sur $]-1,1[$ si $(1-x^2)P''(x) - xP'(x) + \alpha^2 P(x) = 0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)P''(x) - xP'(x) + \alpha^2 P(x) &= (1-x^2)\sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} + \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k x^k \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} \alpha^2 a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - \left(k^2-\alpha^2\right)a_k\right]x^k = 0
\end{aligned}$$

Où on pose $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$. On a donc obtenue une expression polynomiale qui est nulle sur $]-1,1[$. Donc tous ses coefficients sont nuls :

$$\forall k \in \{0 \dots n\} \qquad (k+2)(k+1)a_{k+2} - \left(k^2-\alpha^2\right)a_k = 0$$

Ainsi on trouve la relation de récurrence sur les coefficients : $a_{k+2} = \frac{k^2-\alpha^2}{(k+2)(k+1)}a_k$.

Or P est de degré n, donc $a_n \neq 0$, et de plus $a_{n+2} = 0$. Donc $\frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)} = 0$, c'est-à-dire $n = \pm\alpha$, c'est-à-dire $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la relation de récurrence trouvée permet de construire une solution polynomiale (de degré $|\alpha|$). *Ne pas oublier la réciproque !!! On a un « si et seulement si ».*

En conclusion, $\boxed{\text{Cette équation admet des solutions polynomiales si et seulement si } \alpha \in \mathbb{Z}.}$

3) Pour tout $x \in [-1,1]$, $g_1(x) = \cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos \geqslant 0$ sur l'intervalle considéré.

4) Pour tout $x \in [-1,1]$, $g_2(x) = \cos(2\,\mathrm{Arcsin}\,(x)) = 1 - 2\sin^2(\mathrm{Arcsin}\,(x)) = 1 - 2x^2$.

5) $P_1 = 1 - 2X^2$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$,

$$P_{k+1}(x) = \cos(2 \times 2^k\ \mathrm{Arcsin}\ x) = 2\cos^2(2^k\ \mathrm{Arcsin}\ x) - 1 = 2(P_k(x))^2 - 1$$

La suite de polynômes (P_k) est définie par $P_1 = 1 - 2X^2$ et la relation de récurrence $P_{k+1} = 2P_k^2 - 1$.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1],\ P_k \text{ est une fonction polynomiale de } x}$

Si on note $d_k = \deg P_k$ et c_k son coefficient dominant, l'expression de P_1 et la relation de récurrence nous donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_1 & = & 2 \\ c_1 & = & -2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1 \left\{\begin{array}{rcl} d_{k+1} & = & 2d_k \\ c_{k+1} & = & 2c_k^2 \end{array}\right.$$

La suite (d_k) est géométrique : $d_k = 2^k$.