Fiche : DL

I) Développements limités usuels

Tous les DL usuels suivants sont au voisinage de $\boxed{x=0}$
Les développements limités se regroupent presque tous en deux familles.

A) Famille exponentielle

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{(Taylor)}$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \qquad (\mathrm{ch}\,(x) = \text{partie paire de } e^x)$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (\mathrm{sh}\,(x) = \text{partie impaire de } e^x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \qquad (\cos(x) = \Re(e^{ix}))$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (\sin(x) = \Im(e^{ix}))$$

B) Famille géométrique

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \qquad \text{(série géométrique)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (\text{en remplaçant } x \text{ par } -x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \qquad \text{(en intégrant la série géométrique)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \qquad \text{(au choix)}$$

$$\mathrm{Arctan}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Le dernier s'obtient en remplaçant x par x^2 dans la série géométrique alternée puis en intégrant, car $\mathrm{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

C) Autres

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

S'obtient directement avec la formule de Taylor : $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
Moyen mnémotechnique : ressemble à une formule du binôme (et coïncide avec le binôme lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$).
Cas important : $\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$. On en déduit le DL de $\mathrm{Arcsin}\,(x)$.

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

S'obtient soit à partir de $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, soit $\tan(x) \sim x$ puis $\tan' = 1 + \tan^2$. Pas de formule générale.

II) Rappels des propriétés générales

Propriété 1 (Taylor-Young) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.
Alors $\forall x \in I$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o\big((x-a)^n\big)$$

Preuve : cf cours PTSI.

Remarque 1 Fréquemment, $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Propriété 2 Un développement limité s'intègre terme à terme sans problème.

Propriété 3
Le DL d'une fonction f paire ne contient que des puissances paires.
Le DL d'une fonction f impaire ne contient que des puissances impaires.