Annexe : Systèmes linéaires

A) Résolution de $f(x) = b$ dans le cas général

Dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe uniquement, on considère E et F des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Définition 1 On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = b$, où $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$. On appelle *équation homogène associée* l'équation $f(x) = 0_F$.

Propriété 1 (équation homogène) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
L'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation $f(x) = 0$ forme un sous-espace vectoriel de E.
C'est exactement $\mathrm{Ker}\, f$.

Démonstration. C'est la définition du noyau... □

Propriété 2 (équation avec second membre) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $b \in F$ et $S = \{x \in E \mid f(x) = b\}$.
- Si $b \notin \mathrm{Im}\, f$, alors $f(x) = b$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$.
- Si $b \in \mathrm{Im}\, f$, alors $f(x) = b$ a pour solution le sous-espace affine

$$S = x_0 + \mathrm{Ker}\, f = \{x_0 + x \mid x \in \mathrm{Ker}\, f\}$$

où x_0 est une solution particulière. L'équation est dite *compatible*.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $b \in F$ et $S = \{x \in E \mid f(x) = b\}$.
- Si $f(x) = b$ a une solution, alors $b \in \mathrm{Im}\, f$.
- Si $b \in \mathrm{Im}\, f$, alors par définition il existe des antécédents de b par f. Soit x_0 un tel antécédent.
Montrons que $S = x_0 + \mathrm{Ker}\, f$:
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in S$. Posons $x = y - x_0$.

$$f(x) = f(y - x_0) = f(y) - f(x_0) = b - b = 0$$

Donc $x = y - x_0 \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi, $y \in x_0 + \mathrm{Ker}\, f$.
Par conséquent, $S \subset x_0 + \mathrm{Ker}\, f$.
$\boxed{\supset}$ Soit $y \in x_0 + \mathrm{Ker}\, f$.

$$f(y) = f(x_0) + f(x) = b + 0 = b$$

Donc $y \in S$.
Par conséquent, $x_0 + \mathrm{Ker}\, f \subset S$.

□

Remarque 1 La situation la plus typique en dimension infinie est $E = F = \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ et $f(x) = b$ une équation différentielle — que l'on notera plutôt $\varphi(y) = g$. Nous l'avons déjà rencontrée en exercice.

Propriété 3 (principe de superposition) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b_1, b_2 \in F$.
Si x_1 est une solution de $f(x) = b_1$ et x_2 une solution de $f(x) = b_2$, alors $x_1 + x_2$ est solution de $f(x) = b_1 + b_2$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b_1, b_2 \in F$.
Si x_1 est une solution de $f(x) = b_1$ et x_2 une solution de $f(x) = b_2$, alors

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = b_1 + b_2$$

Donc $x_1 + x_2$ est solution de $f(x) = b_1 + b_2$. □

B) Le cas de la dimension finie : les systèmes linéaires

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues l'ensemble d'équations dans $\mathbb{R}^p$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

où les $(a_{i,j})$ et les (b_i) sont des données fixées.

1) Interprétations

a) En termes de vecteurs colonnes

Si on note $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, A_p = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système (1) s'écrit

$$\boxed{x_1A_1 + x_2A_2 + \dots x_pA_p = B}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que de tels (x_i) existe est que $B \in \mathrm{Vect}\,(A_1, A_2, \dots, A_p)$, c'est-à-dire que la famille $(A_1, A_2, \dots, A_p, B)$ soit liée.

b) En termes matriciels

Si on note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, le système (1) s'écrit

$$\boxed{AX = B}$$

Traduisons en termes d'applications linéaires : si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est l'application linéaire ayant pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$, et $b \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur ayant pour matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, résoudre $AX = B$ revient à résoudre $f(x) = b$.
D'après la propriété 2, ce système a une solution si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\ f$ et les solutions sont alors de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\ f$ avec x_0 une solution particulière.
Un cas particulier nous intéresse :

Propriété 4 Si $p = n$ et A est inversible, alors $AX = B$ a toujours une unique solution $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Soit on applique la propriété 2, soit on le montre directement, en multipliant par A^{-1} à gauche. □

Vocabulaire 1 Un système où A est inversible est appelé un *système de Cramer.*

2) Opérations

Toutes les opérations doivent se faire sans perte d'information, c'est-à-dire qu'il doit exister une opération inverse (et on peut donc utiliser le symbole $\Leftrightarrow$). Par exemple, on ne peut pas multiplier une ligne par 0 : l'information serait définitivement perdue.

a) Opérations sur les lignes d'un système

Pour résoudre un système, en pratique, on effectue des opérations sur les lignes, pour le transformer en un système triangulaire. Il y a trois type d'opérations :

1) Permuter les lignes L_i et L_j : $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow L_j$

2) Multiplier L_i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$

3) Remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

b) Traduction en termes matriciels

Remarque préliminaire : $E_{1,2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc, au moins pour une matrice 2×2, multiplier par $E_{1,2}$ place la ligne L_2 sur la 1-ière ligne, et des 0 ailleurs.

Plus généralement, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $E_{i,j}A$ donne la matrice avec la ligne L_j sur la i-ième ligne, et des 0 ailleurs. Ainsi, chacune des opérations du a) revient à multiplier *à droite* par une matrice ad hoc

3) Remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: $(I_n + \lambda E_{i,j})A$

On trouve aussi des matrices pour les deux autres opérations :

1) Permuter les lignes L_i et L_j : TA où $t_{i,j} = t_{j,i} = 1$ et $t_{k,k} = 1$ pour $k \neq i, j$, des 0 ailleurs.

2) Multiplier L_i par $\lambda \neq 0$: $(I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})A$

« Effectuer une opération inversible » se traduit, en terme de produit de matrices, par « multiplier par une matrice inversible ».

c) Opération sur les colonnes

Faire une opération sur les colonnes, c'est multiplier à droite.

Pour résoudre un système $AX = B$, ça ne sert pas : si A est inversible, on veut multiplier *à gauche* par A^{-1}.

Pour trouver un inverse, il ne faut surtout pas mélanger les deux. sinon, on se retrouve avec $M_L A M_C = I_n$, où M_L est la matrice correspondant aux opérations sur les lignes, et M_C la matrice correspondant aux opérations sur les colonnes. Or le produit n'est pas commutatif, donc on n'en déduit pas de M tel que $MA = AM = I_n$.

Pour calculer un déterminant, par contre, on a $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, donc on peut mélanger les deux type d'opérations. Mais il faut tenir compte du « déterminant de l'opération ».

3) Exemple de résolution

a) $AX = 0$

Résolvons le système suivant :

$$(S_1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & -x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & -2x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 10x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 5 & 2 & -2 \\ 9 & 12 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. Le système (S_1) s'écrit donc $AX = 0$. Résolution :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & 5 & 2 & -2 \\ 9 & 12 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

Le système s'écrit donc :

$$(S_1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & -x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & & & & & 6x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $X = \begin{pmatrix} -4/3x_2 - 1/3x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{S}_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Explication des dernières étapes :

- Lorsque le système est sous forme triangulaire, on le résout par le bas :
  - ▷ Équation 3 : $6x_5 = 0$, donc $x_5 = 0$.
  - ▷ Équation 2 : $x_3 = 0$. De plus, on est passé directement à une équation concernant x_3. il n'y a donc pas de contrainte sur x_4, on peut le choisir comme paramètre. Pour plus de clarté, posons $x_4 = \lambda$.
  - ▷ Équation 1 : $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + -x_5 = 0$, donc $3x_1 = -4x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -4x_2 - x_4$. C'est une équation concernant x_1, on pose $x_2 = \mu$ et $x_1 = -4/3\mu - 1/3\lambda$.
- On a donc finalement obtenu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\mu - \frac{1}{3}\lambda \\ \mu \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\mu \\ \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Plutôt que de décomposer en une somme de deux vecteurs, puis sortir le λ et le μ, poser $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, donne le premier vecteur, puis $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ donne le second.
- Par définition, Vect $\left(\begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des combinaisons linaires à partir de ces deux vecteurs, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est exactement ce que l'on cherche à décrire !
- Ne pas avoir de fractions, c'est mieux. Il suffit de multiplier les deux vecteurs par 3.

b) $AX = B$

La technique est la même, mais il ne faut pas oublier d'effectuer les opérations sur le vecteur colonne B aussi.

Parties fondamentales : A) — B)1)b) — B)2)a) — B)3)