

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (E3A PC 2009 B, ex2)

1) On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a) **i)** Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x-1)^2+(2y)^2=1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

ii) Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$. Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par f_1, c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.
Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

et préciser la nature de cette courbe.

c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.
Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $(2x)^2 + (1-2y^2)^2 = 1$.

2) On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a) Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.

b) Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1.
De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.
En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de $\Gamma = S_1 \cap S_2$.

c) Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.
En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.

d) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

e) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

Exercice 2 (PT 2007 B, partie 1)

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit α un réel.

1) Soit S la surface d'équation
$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$$

a) Quelle est la nature de S ?

b) Quelle est la nature de l'intersection entre S et un plan d'équation $z = \alpha$? (on pourra séparer plusieurs cas en fonction des valeurs du paramètre α).

Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les points d'intersection entre la courbe et les axes de coordonnées).

c) Quelle est la nature de l'intersection entre S et un plan d'équation $x = \alpha$?

2) Soit q la forme quadratique définie par
$$q(x, y, z) = y^2 + 2xz$$

a) Pour tout couple de réels (x, z), donner une relation entre xz, $(x+z)^2$ et $(x-z)^2$.

b) Écrire q comme combinaison linéaire de trois carrés.

c) Déterminer une transformation orthogonale $\varphi : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ telle que
$$q(x, y, z) = aX^2 + bY^2 - aZ^2$$
où a et b sont des constantes positives que l'on précisera.

Quelle est la nature de l'application φ ?

3) On considère la quadrique S_1 d'équation
$$y^2 + 2xz - 2x = 0$$
Quelle est la nature de S_1 ? Préciser le centre de cette quadrique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

4) On note $\mathcal{P}_1$ l'intersection entre S_1 et le plan xOy. Quelle est la nature de $\mathcal{P}_1$?

5) Donner une équation du cône C_1 ayant pour sommet le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ s'appuyant sur la courbe $\mathcal{P}_1$.

6) Soit A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A), $z_A \neq 0$. On désigne par C_A le cône de sommet A et s'appuyant sur $\mathcal{P}_1$.

a) Donner une équation cartésienne de C_A.

b) À quelle condition sur (x_A, y_A, z_A) le point B de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient-il à C_A ?

c) Déterminer l'ensemble des sommets des cônes de $\mathbb{R}^3$ contenant $\mathcal{P}_1$ et le point B.

Exercice 3 (d'après ENS)

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E.

1) Montrer que $\mathscr{N}$ est un cône de sommet 0, c'est-à-dire que pour tout M non nulle de $\mathscr{N}$, la droite $\mathrm{Vect}\,(M)$ est incluse dans $\mathscr{N}$.

On admet que les éléments de $\mathscr{N}$ sont exactement les matrices de traces et de déterminants nuls.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to E$ définie par $\varphi((a, b, c)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $\mathscr{N} \subset \mathrm{Im}\ \varphi$.

3) Montrer que $\mathscr{N}$ est l'image par φ du cône $\mathscr{C}$ d'équation $a^2 + bc = 0$.

4) Prouver que tout point non nul de $\mathscr{C}$ est un point régulier de la surface $\mathscr{C}$, et que le plan tangent en un tel point $P \in \mathscr{C}$ est $\{Q \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{Tr}(\varphi(P)\varphi(Q)) = 0\}$.

Exercice 4 (E3A MP 2011 B)

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$.

1) Quelle est la nature de la quadrique d'équation $x^2 + z^2 = 1$ dans le repère $\mathcal{R}$?

2) On considère le solide $\mathcal{S}$ défini, dans le repère $\mathcal{R}$, par les équations $x^2 + z^2 \leqslant 1$ et $y^2 + z^2 \leqslant 1$.

- **a)** Soit γ un nombre réel. Décrire précisément la nature géométrique de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = \gamma$, selon la valeur de γ.
- **b)** Déterminer le volume de $\mathcal{S}$.

3) Soit Σ la portion de surface définie dans le repère $\mathcal{R}$ par les équations :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = k \\ y^2 + z^2 = k \\ (x, y, z, k) \in [0, 1]^4 \end{cases}.$$

Déterminer l'aire de Σ.

FIN DE L'ÉPREUVE