Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (E3A PC A 2011)

Les quatre parties sont très largement indépendantes. Dans tout le problème :

- f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
- F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Partie 1 (Résultats préliminaires)

1) Étude de (a_n)

a) Étudier la monotonie de la suite (a_n). Est-elle convergente ?

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

2) Étude d'une intégrale impropre.

a) Justifier l'existence de F. Justifier l'existence de α.

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).

c) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.

d) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

e) Montrer que $\alpha \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant \alpha + 1$.

Partie 2 (Intégrales de Wallis)

Dans cette partie, si $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

4) Montrer que (I_n) est une suite décroissante et convergente.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par partie).

6) En déduire que $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante (et donner sa valeur).

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)a_n}$.

8) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.

b) Calculer la limite des suites de terme général $\dfrac{I_{n-2}}{I_n}$, $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

c) Donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ en $+\infty$.

c) Donner la nature des séries de terme général

$$a_n \qquad \frac{a_n}{4n+1} \qquad (-1)^n a_n \qquad \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$$

Partie 3 (Développement en série entière de F et utilisation)

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de 2.9.b : $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

1) Étude de h.

a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.

b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.

c) Énoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ sur le segment $[0, R]$ et en déduire que h est continue sur $[-1, 1]$.

2) Développement en série entière de F

a) Montrer que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ $F(x) = h(x)$.

c) En déduire que $\alpha = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α : Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p-ième somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$, soit $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{2}{4p+5}a_{p+1}$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{\frac{3}{2}}}$

c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Exercice 2 (E3A PSI B 2009)

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.

Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.

Soit (α_n) une suite réelle.

On rappelle que la relation $\alpha_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge. On pourra commencer par montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang.

2) Soit β un réel quelconque et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\mu}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3) On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geqslant N$, on ait $u_n \leqslant K v_n$.

c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

4) On suppose que $0 \leqslant \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5) Pour $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{n \ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B.

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1) Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2) Pour $n \geqslant 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b) Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3) Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 \ ; \ \forall n \geqslant 1, \ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \ ; \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

b) Utimiser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

e) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

FIN DE L'ÉPREUVE