

Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1

- 1) Les fonctions x et y sont 2π -périodique, on peut donc se restreindre à un intervalle de longueur 2π .

De plus, $\begin{cases} x(t+\pi) = -x(t) \\ y(t+\pi) = -y(t) \end{cases}$, donc on peut se restreindre à $[-\pi/2, \pi/2]$ et construire le reste de la courbe à l'aide d'une symétrie par rapport à O .

Finalement, x est paire et y impaire, donc on peut se restreindre à $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et construire le reste de la courbe à l'aide des symétries par rapport à l'axe (Ox) et au point O .

Pour tout $t \in I$, $\begin{cases} x'(t) = 3(-\sin t + \sin 3t) = 6 \sin t \cos 2t \\ y'(t) = 3(\cos t - \cos 3t) = 6 \sin t \sin 2t \end{cases}$

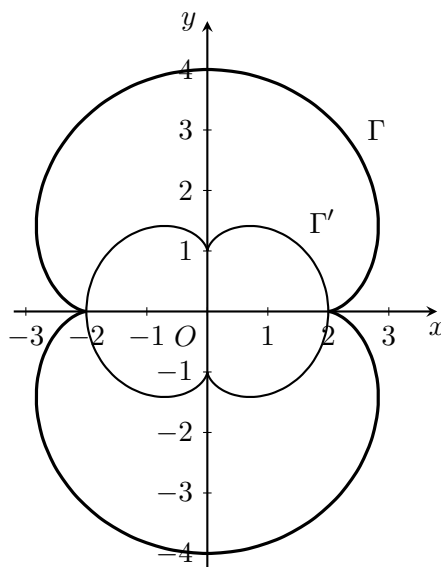
Ainsi $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 0$ si et seulement si $t = 0$. Or

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} x''(t) = 3(-\cos t + 3 \cos 3t) \\ y''(t) = 3(-\sin t + 3 \sin 3t) \end{cases} \quad \begin{cases} x'''(t) = 3(\sin t - 9 \sin 3t) \\ y'''(t) = 3(-\cos t + 9 \cos 3t) \end{cases}$$

Donc les dérivées secondes et troisièmes en 0 sont respectivement $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}$.

En conclusion, $\boxed{\text{Il y a un point de rebroussement de première espèce en } t = 0.}$

- 2) Tracé de la courbe et de sa développée.



- 3) D'après 1), sur I , $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = 6 \sin t$ (puisque $\sin t > 0$). Ainsi

$$\boxed{\vec{T} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N} \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}}$$

En notant α l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{T}$, les coordonnées de $\vec{T}$ nous donnent $\alpha = 2t [2\pi]$, et donc

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \times \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{6 \sin t} \times 2 = \frac{1}{3 \sin t}$$

Finalement, $\boxed{R = \frac{1}{\gamma} = 3 \sin t}$

4) Par définition, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N}$, donc

$$\begin{cases} x_C(t) &= 3 \cos t - \cos 3t + 3 \sin t (-\sin 2t) &= \frac{1}{2}(3 \cos t + \cos 3t) \\ y_C(t) &= 3 \sin t - \sin 3t + 3 \sin t \cos 2t &= -\frac{1}{2}(3 \sin t + \sin 3t) \end{cases}$$

5) On remarque que $\begin{cases} x_C(t) &= \frac{1}{2}(3 \cos t + \cos 3t) &= \frac{1}{2}y(t + \pi/2) \\ y_C(t) &= -\frac{1}{2}(3 \sin t + \sin 3t) &= -\frac{1}{2}x(t + \pi/2) \end{cases}$

La transformation $(x, y) \mapsto (y, -x)$ est la rotation d'angle $\pi/2$, donc la construction de Γ' se déduit de celle de Γ par une rotation d'angle $\pi/2$ composée avec une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

6) Par symétrie, $\boxed{L_\Gamma} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} s'(t) dt = 4[-3 \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{24}$

De plus, Γ' est l'image de Γ par une rotation (qui ne change pas les longueurs) puis une homothétie de

rapport $1/2$: $\boxed{L_{\Gamma'} = \frac{1}{2}L_\Gamma = 12}$.

Exercice 2 (PT B 2009 partie II)

On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$$

1) Sur $[0, \pi]$, $\sin(2\theta)$ est positif lorsque $\theta \in [0, \pi/2]$, donc $\boxed{\text{la fonction } \rho \text{ est définie pour } \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right]}$.

2) La fonction ρ est π périodique, donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi/2]$, la portion de courbe sur $[\pi, 3\pi/2]$ s'obtenant par une rotation d'angle π .

De plus, pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{\sin(\pi - 2\theta)} = \sqrt{\sin(2\theta)} = \rho(\theta)$$

donc la courbe Γ a pour axe de symétrie la droite d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, i.e. la première bissectrice.

$\boxed{\text{En résumé, il suffit d'étudier la fonction } \rho \text{ sur } [0, \pi/4], \text{ le reste de la courbe s'obtenant par symétrie par rapport à la première bissectrice } (\theta \in [\pi/4, \pi/2]) \text{ puis par symétrie de centre } O \text{ } (\theta \in [\pi, 3\pi/2])}$.

3) La fonction ρ est dérivable sur $]0, \pi/4]$.

$$\forall \theta \in]0, \pi/4], \quad \rho'(\theta) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{\sin(2\theta)}}$$

D'où le tableau de variation suivant

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
$\rho'(\theta)$		+
ρ	0	1

- 4) Dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a $y(\theta) = \rho \sin(\theta)$. Donc $y(\theta) = 0$ lorsque $\theta = 0$.

En conclusion, La courbe coupe l'axe des abscisses lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire en $(0, 0)$.

- 5) Soit $\theta \in]0, \pi/4]$. Comme $\rho(\theta) \neq 0$, $\frac{d\vec{OM}}{d\theta} \neq 0$ et est un vecteur directeur de la tangente.

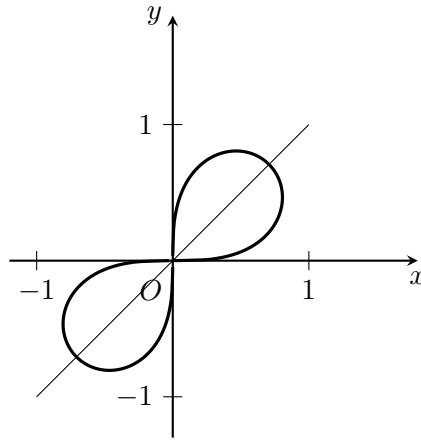
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{OM}}{d\theta} &= \rho' \vec{u} + \rho \vec{v} = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{\sin(2\theta)}} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \sqrt{\sin(2\theta)} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}} \left((\cos(2\theta) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta) \vec{i} + (\cos(2\theta) \sin \theta + \sin(2\theta) \cos \theta) \vec{j} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}} (\cos(3\theta) \vec{i} + \sin(3\theta) \vec{j}) \end{aligned}$$

Soit $P(x, y)$ un point de la tangente en $M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. L'équation est donnée par

$$\det \left(\overrightarrow{MP}, \frac{d\vec{OM}}{d\theta} \right) = \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}} \det \begin{pmatrix} x - \sqrt{\sin(2\theta)} \cos \theta & \cos 3\theta \\ y - \sqrt{\sin(2\theta)} \sin \theta & \sin 3\theta \end{pmatrix} = 0$$

Finalement, l'équation cherchée est $x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = \sqrt{\sin(2\theta)} \sin 2\theta$

6)



- 7) Calculons le vecteur $\vec{T}$ du repère de Frenet. D'après 5), dans le repère fixe,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta} \right\| = \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}} \quad \text{et} \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha = 3\theta \ [2\pi]$. Ainsi $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \times \sqrt{\sin(2\theta)} = 3\sqrt{\sin(2\theta)}$.

Équation de la développée : le centre de courbure $C(\theta)$ est défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N}$. Ainsi, dans le repère fixe,

$$\begin{cases} x_C(\theta) &= \rho \cos \theta + 3\sqrt{\sin(2\theta)}(-\sin 3\theta) &= \sqrt{\sin(2\theta)}(\cos \theta - 3\sin 3\theta) \\ y_C(\theta) &= \rho \sin \theta + 3\sqrt{\sin(2\theta)}(\cos 3\theta) &= \sqrt{\sin(2\theta)}(\sin \theta + 3\cos 3\theta) \end{cases}$$

Exercice 3 (PT B 2010 partie B)

- 1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 5$ donc $\Omega(2, 1)$ et $R = \sqrt{5}$

- 2) La tangente au cercle de centre Ω en M est la droite passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M}$.

Ici, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à la tangente, et une équation est $2x + y = 0$.

- 3) L'équation de d_m est de la forme $y = mx + b$, où b vérifie $-2 = 3m + b$. Donc $b = -(3m + 2)$ et l'équation devient

$$\text{ $y = mx - (3m + 2)$ }$$

- 4) La formule de la distance d'un point à une droite nous donne

$$\delta_m = \frac{|mx_\Omega - y_\Omega - (3m + 2)|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

- 5) Une droite est tangente à un cercle si et seulement si la distance de la droite au centre du cercle est égale au rayon. Ce qui s'écrit ici $\delta_m = R = \sqrt{5}$. En élevant au carré cette égalité, il vient

$$\frac{(m + 3)^2}{m^2 + 1} = 5 \iff m^2 + 6m + 9 = 5m^2 + 5 \iff 4m^2 - 6m - 4 = 0$$

Cette dernière équation a pour solutions (racines évidentes) $m = 2$ et $m = -\frac{1}{2}$.

En conclusion, Il existe deux valeurs, $m = 2$ et $m = -\frac{1}{2}$, pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

$$d_2 : y = 2x - 8 \quad \text{et} \quad d_{-1/2} : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Le point d'intersection de d_2 et de $\mathcal{C}$ vérifie $y = 2x - 8$ et $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, ce qui nous donne, en remplaçant y par son expression,

$$x^2 + (2x - 8)^2 - 4x - 2(2x - 8) = 0$$

En développant et en résolvant, on trouve $x = 4$ et donc $y = 2 \times 4 - 8 = 0$. Donc $d_2 \cap \mathcal{C} = \{(4, 0)\}$

De même pour $d_{-1/2}$, on trouve $d_{-1/2} \cap \mathcal{C} = \{(1, -1)\}$

- 6) La courbe $\mathcal{E}$ est une ellipse centrée à l'origine, avec $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$, donc $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad F_1(0, -c) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{et} \quad F_2(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{Équation des directrices : } y = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- 7) Le point B correspond par exemple au paramètre $t = \frac{\pi}{3}$. Un vecteur directeur de la tangente en B a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Donc une équation de la tangente sera $2x + \sqrt{3}y = K$. Comme B est sur la droite, on trouve $K = 2$

$$2x + \sqrt{3}y = 2$$

- 8) a) On se place au point de coordonnées $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2} \cos t_0, \sin t_0)$. En suivant une démarche identique à celle de la question 8), on trouve

$$x \cos t_0 + \frac{1}{2}y \sin t_0 = 2xx_0 + \frac{1}{2}yy_0 = K$$

Comme $M(x_0, y_0)$ appartient à la tangente, on en déduit $K = 2x_0^2 + \frac{1}{2}y_0^2 = \frac{1}{2}$. Une équation s'écrit donc

$$4xx_0 + yy_0 = 1$$

Méthode rapide : si la courbe est définie par une équation $f(x, y) = 0$, le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ est un vecteur normal en (x_0, y_0) . On en déduit qu'une équation de la tangente est (ici) de la forme

$$8x_0x + 2y_0y = K'$$

Comme $M(x_0, y_0)$ appartient à la tangente, on en déduit $K' = 8x_0^2 + 2y_0^2 = 2$.

b) Supposons D tangente à $\mathcal{E}$.

D'après la question précédente, on ne peut pas avoir $c = 0$. Donc l'équation de l'énoncé s'écrit $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = 1$. On identifie avec les coefficients trouvés dans la question a) : $x_0 = \frac{a}{4c}$ et $y_0 = \frac{b}{c}$.

Comme $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, il vient finalement $4\left(\frac{a}{4c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. En développant,

$$\boxed{a^2 + 4b^2 = 4c^2}$$

Réciproquement, si $a^2 + 4b^2 = 4c^2$, $c \neq 0$ et on pose $x_0 = \frac{a}{4c}$ et $y_0 = \frac{b}{c}$. On retrouve l'équation du a), et D est donc tangente à $\mathcal{E}$.

c) $M \in D$ si et seulement si $a\alpha + b\beta = c$, c'est-à-dire, en divisant par $a \neq 0$, si et seulement si

$$\frac{c}{a} = \alpha + m\beta$$

De même, d'après b), D tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si $a^2 + 4b^2 = 4c^2$, c'est-à-dire si

$$\frac{1}{4} + m^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

En conclusion, D passe par M en étant tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\frac{1}{4} + m^2 = (\alpha + m\beta)^2$$

En développant et en réordonnant selon m , cette équation s'écrit

$$\boxed{(1 - \beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0}$$

d) Une droite tangente à $\mathcal{E}$ passe par le point $M(\alpha, \beta)$ si et seulement si son coefficient directeur vérifie l'équation précédente (depuis le début on a supposé $a \neq 0$ c'est-à-dire que la droite n'est pas verticale).

Donc deux droites tangentes à $\mathcal{E}$ passent par le point $M(\alpha, \beta)$ seulement si l'équation précédente, de degré 2, a deux racines réelles distinctes. Ce qui s'écrit avec le discriminant :

$$\Delta = (2\alpha\beta)^2 - (1 - 4\alpha^2)(1 - \beta^2) = \boxed{4\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0}$$

Géométriquement, cela signifie que Le point M doit être à l'extérieur de l'ellipse.

Ce n'est pas un scoop, intuitivement.

e) Pour que les deux tangentes soient orthogonales, il faut et il suffit que leurs coefficients directeurs — solutions du trinôme trouvé au c) — vérifient $m_1 m_2 = -1$.

À l'aide des relations coefficients racines, il vient $m_1 m_2 = \frac{1/4 - \alpha^2}{1 - \beta^2} = -1$. En développant, on trouve

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \frac{5}{4}}$$

(On peut prolonger par continuité en $\beta = 1$).

C'est un cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, appelé cercle orthoptique de l'ellipse (Dessin en exercice).

Exercice 4 (PT B 2006 partie C)

1) Soit M un point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M \in \Gamma_k \iff (MF \cdot MF')^2 = k^2 \iff \boxed{((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = k^2}$$

2) L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$ donc

$$M \in \Gamma_k \cap (Ox) \iff \begin{cases} ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = k^2 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x^2-1)^2 = k^2 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 + k^2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{M \in \Gamma_k \cap (Ox) \iff (x, y) = (\pm\sqrt{1+k}, 0)}$$

3) a) On utilise la relation de Chasles :

$$MF^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OF} + OF^2 = OM^2 + OF^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OF}$$

De même pour F' : $MF'^2 = OM^2 + OF'^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OF}'$. En sommant,

$$MF^2 + MF'^2 = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF}'}_{\overrightarrow{0}})$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{MF^2 + MF'^2 = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2}$$

$$\text{b) } (MF - MF')^2 + 2MF \cdot MF' = MF^2 - 2MF \cdot MF' + MF'^2 + 2MF \cdot MF' = MF^2 + MF'^2.$$

(Dans ce genre de question, mettez une étape intermédiaire (surtout qu'elle est formulée « montrer que »))

c) Soit $M \in \Gamma_k$. D'après les deux questions précédentes,

$$2OM^2 = -OF^2 - OF'^2 + MF^2 + MF'^2 = -2 + 2k + (MF - MF')^2$$

En utilisant, dans l'égalité ci-dessus, d'une part que $(MF - MF')^2 \geq 0$ et d'autre part l'inégalité triangulaire¹ $|MF - MF'| \leq FF' = 2$, il vient

$$\boxed{k - 1 \leq OM^2 \leq (-2 + 2k + 2^2)/2 = k + 1}$$

4) L'équation de la question 1, qui définit la courbe Γ_k , est invariante par changement de x en $-x$ ou de y en $-y$. La courbe est donc stable par les $\boxed{\text{symétrie d'axes } (Oy) \text{ et } (Ox)}$ (et donc aussi leur composée, la symétrie de centre O).

Montrer qu'il n'y en a pas d'autre serait plus compliqué, mais malgré la formulation de la question ce n'est pas attendu.

5) On cherche une équation de la forme $y = \varphi_k(x)$, donc on développe puis on résout l'équation de la question 1 comme une équation en y

$$((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) - k^2 = y^4 + 2(x^2 + 1)y^2 + (x^2 - 1)^2 - k^2 = 0$$

C'est une équation bicarrée : $\Delta/4 = (x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2 + k^2 = 4x^2 + k^2 > 0$. Il y a deux racines,

$$\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1) \quad \text{et} \quad -\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)$$

Seule la première est potentiellement positive, donc $y = \pm\sqrt{\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)}$ (lorsque la racine est bien définie, ce qui sera déterminé à la question 6a). On a supposé de plus que $y \geq 0$, donc

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_k \text{ admet une équation cartésienne de la forme } y = \sqrt{\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)}}$$

6) a) La fonction $f_k = \varphi_k$ est bien définie pour x vérifiant $4x^2 + k^2 \geq 0$ (ce qui est toujours le cas) et

$$\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1) \geq 0$$

Étudions plus en détail la seconde inégalité, qui s'écrit $\sqrt{4x^2 + k^2} \geq (x^2 + 1)$. Comme $x^2 + 1 \geq 0$,

$$\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1) \geq 0 \iff 4x^2 + k^2 \geq (x^2 + 1)^2 \iff x^4 - 2x^2 + 1 - k^2 \geq 0$$

Ce polynôme se factorise :

$$x^4 - 2x^2 + 1 - k^2 = (x^2 - (1 + k))(x^2 - (1 - k)) = (x - \sqrt{1 + k})(x + \sqrt{1 + k})(x^2 - (1 - k))$$

1. Ne pas oublier l'autre côté de l'inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x - y|$, ce qui s'écrit $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$ lorsque x et y sont des vecteurs.

- i) Si $k \geq 1$, $(x^2 - (1 - k)) > 0$ et le tableau de signe immédiat nous donne $D_k = [0, \sqrt{1 + k}]$
(Rappel : on est sur $\mathbb{R}_+$)
- ii) Si $k \leq 1$, $(x^2 - (1 - k)) \leq 0$ pour $x \in [0, \sqrt{1 - k}]$. Comme $\sqrt{1 - k} < \sqrt{1 + k}$, le tableau de signe du polynôme nous donne $D_k = [\sqrt{1 - k}, \sqrt{1 + k}]$

(Le principe, dans ce genre de situation, c'est de se débarrasser au plus vite des racines. La technique consiste à écrire $\sqrt{\text{blabla}} = [\text{une expression sans racines}]$ puis élever au carré, en faisant attention aux signes.)

- b) La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0, donc il faut étudier quand ce qu'il y a sous les racines s'annule. $4x^2 + k^2 > 0$ donc il n'y a pas de problème de ce côté là.
Ce qu'il y a sous la grande racine s'annule lorsque $x = \sqrt{1 + k}$ et (si $k \leq 1$) $x = \sqrt{1 - k}$. Donc (il faudrait calculer $f_k(a+h)/h$ aux points potentiellement problématiques, pour vérifier que ce n'est pas dérivable — flemme) f_k est dérivable sur $[0, \sqrt{1 + k}[$ ou $] \sqrt{1 - k}, \sqrt{1 + k}[$ selon que $k > 1$ ou $k < 1$.

Pour $k = 1$, en 0, $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{1 + 4x^2} - (x^2 + 1)} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{2} + o(x^2) - x^2 - 1} \sim x$ donc $f'_1(0)$ existe (et vaut 1) : f_1 est dérivable en 0.

$$f'_k(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{x(2 - \sqrt{4x^2 + k^2})}{f_k(x)\sqrt{4x^2 + k^2}}$$

- c) Sur $\mathbb{R}_+$, le signe de $f'_k(x)$ est celui de $g_k(x) = 2 - \sqrt{4x^2 + k^2}$.
- Si $k \geq 1$. $D'_k = [0, \sqrt{1 + k}[$. Pour tout x , $\sqrt{4x^2 + k^2} \geq k$, donc $g_k \leq 2 - k$.
 - Par conséquent $\text{Si } k \geq 2, f'_k \leq 0 \text{ sur } D'_k$.
 - Si $1 \leq k < 2$, g_k s'annule pour $x = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ et on a le tableau de signe suivant :

(Pour $k = 1$, la dérivée vaut 1 et non 0 en 0)

- Si $k < 1$. $D'_k =]\sqrt{1 - k}, \sqrt{1 + k}[$ et une démarche identique nous donne

x	$\sqrt{1 - k}$	$\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$	$\sqrt{1 + k}$
$g_k(x)$	+	0	−
f'_k	+	0	−

- d) D'après la question précédente,

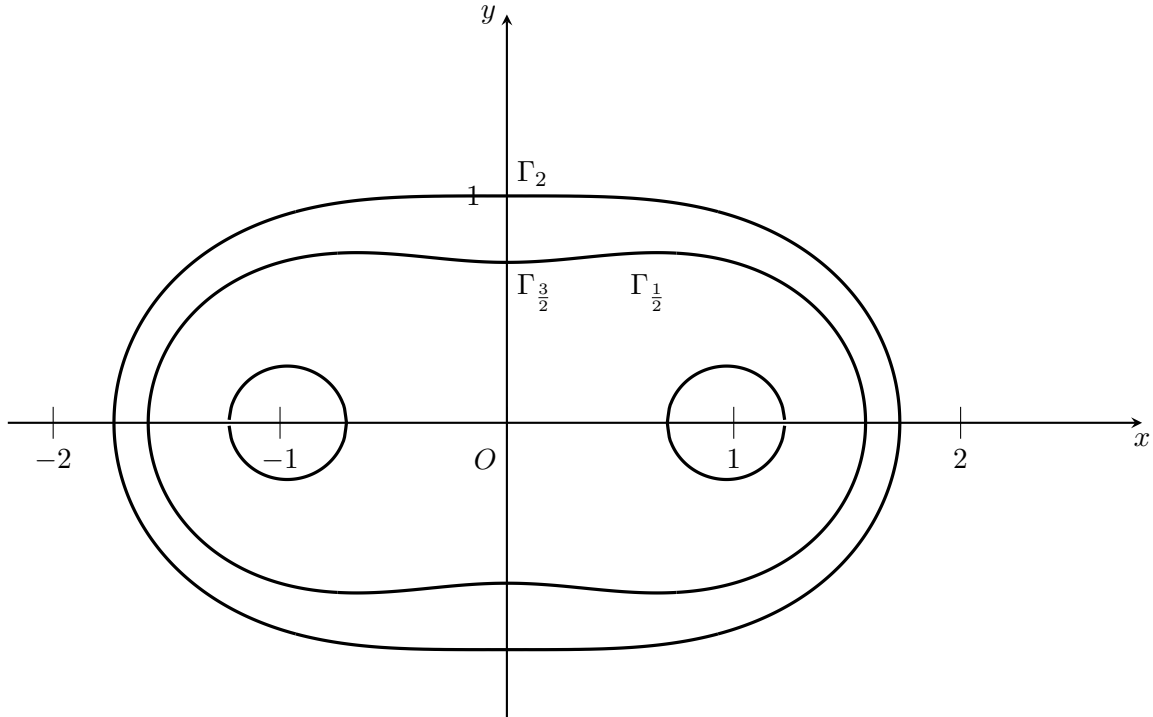
$$0 < k < 1$$

$$k = 1$$

x	$\sqrt{1 - k}$	$\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$	$\sqrt{1 + k}$
f'_k	+	0	−
f_k	$0 \nearrow \frac{k}{2} \searrow 0$		

$1 < k < 2$				$2 \leq k$			
x	0	$\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$		$\sqrt{1 + k}$	x	0	$\sqrt{1 + k}$
f'_k	0	+	0	-	f'_k	0	-
f_k	$\sqrt{k-1} \nearrow \frac{k}{2} \searrow 0$				f_k	$\sqrt{k-1} \searrow 0$	

7) Tracé des courbes Γ_k pour $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{3}{2}$ et $k = 2$.



Exercice 5

1) L'équation s'écrit $y \ln x + x \ln y - y \ln y = 0$. En remplaçant y par tx il vient

$$tx \ln x + (1-t)x \ln(tx) = tx \ln x + (1-t)x \ln t + (1-t)x \ln x = 0$$

Après simplification ($x \neq 0$), on trouve $x = e^{(t-1) \ln t}$ et $y = tx = e^{t \ln t}$.

L'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$ est donc réduite à un point.

Par construction, les points de coordonnées $(e^{(t-1) \ln t}, e^{t \ln t})$ sont sur la courbe $\mathcal{C}$.

Réciproquement, on remarque que les droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ balayent tout le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, donc aucun point de $\mathcal{C}$ ne nous a échappé.

En conclusion, les formules précédentes forment un paramétrage de $\mathcal{C}$.

2) Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$x'(t) = \left(-\frac{1}{t} + 1 + \ln t\right) e^{(t-1) \ln t} \quad \text{et} \quad y'(t) = (1 + \ln t) e^{t \ln t}$$

La fonction $g(t) = -\frac{1}{t} + 1 + \ln t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée) et $g(1) = 0$. Ainsi,

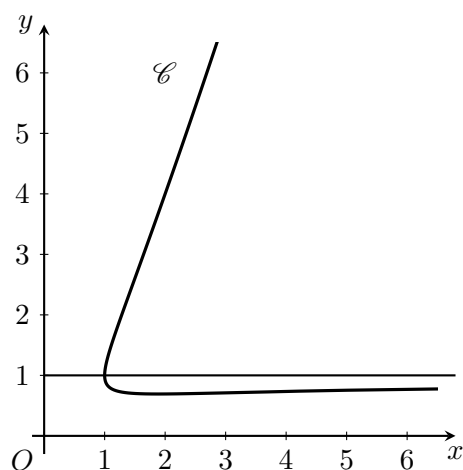
- $x(1/e) = e^{1-\frac{1}{e}}$
- $y(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$

t	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+
x	$+\infty$	$x(1/e)$		$+\infty$
$y'(t)$		-	0	+
y	1	$y(1/e)$		$+\infty$

3) Au voisinage de $t = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. La courbe est située sous l'asymptote.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$: $\frac{y}{x} = t \rightarrow +\infty$, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction $(0y)$.

4) Tracé (il faudrait placer le point $(x(1/e), y(1/e))$ (tangente horizontale) et $(1, 1)$ (tangente verticale).



FIN DE L'ÉPREUVE