Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) &= 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

1) Étudier les éventuels points singuliers de Γ.

2) Tracer proprement la courbe Γ.

3) Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.

4) En déduire les coordonnées du centre de courbure $C(t)$ de Γ associé au point $M(t)$.

5) On désigne par Γ' l'arc paramétré formé par les points $C(t)$. Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de Γ' de celle de Γ ? Construire Γ' sur la même figure.

6) Calculer la longueur de la courbe Γ. Quelle est la longueur de la courbe Γ' ?

Exercice 2 (PT B 2009 partie II)

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$$

1) Déterminer l'ensemble des réels θ pour lesquels $\rho(\theta)$ est bien défini.

2) Vérifier qu'il suffit d'étudier la fonction ρ sur $[0, \pi/4]$. Par quelles transformations du plan obtient-on l'ensemble de la courbe à partir de cette étude ?

3) Étudier les variations de ρ.

4) Déterminer l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. On admettra que la courbe admet une tangente horizontale en ces points.

5) Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta \in]0, \pi/4]$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6) Dessiner la courbe.

7) Déterminer la courbure $\gamma(\theta)$ en $M(\theta)$. En déduire une équation de la développée dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 3 (PT B 2010 partie B)

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \qquad \text{et} \qquad 4x^2 + y^2 = 1$$

1) Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathscr{C}$.

2) Former une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point O.

3) On considère le point A de coordonnées $(3,-2)$. Déterminer l'équation de la droite d_m de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$ passant par A.

4) Exprimer, en fonction du réel m, la distance δ_m du point Ω à la droite d_m.

5) En déduire qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathscr{C}$. Donner des équations de ces deux droites et déterminer les coordonnées des points de contact de ces droites avec le cercle $\mathscr{C}$.

6) Déterminer la nature, l'excentricité, les foyers F_1 et F_2 et les directrices de la courbe $\mathscr{E}$.
On paramètre alors $\mathscr{E}$ en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{2}\cos t \\ y & = & \sin t \end{array}\right.$$

7) Former une équation de la tangente à $\mathscr{E}$ au point $B\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8) On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathscr{E}$.

a) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{E}$ au point de coordonnées (x_0, y_0).

b) On considère la droite D d'équation $ax + by = c$ avec a et b réels non tous deux nuls.
Montrer que la droite D est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$a^2 + 4b^2 = 4c^2$$

c) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\beta^2 \neq 1$. On supposera $a \neq 0$ et on notera $m = -b/a$.
Montrer que D passe par M en étant tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si

$$(1-\beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0$$

d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que passent deux droites tangentes à $\mathscr{E}$ par le point $M(\alpha, \beta)$. Une interprétation géométrique simple de la condition analytique est demandée.

e) Déterminer alors l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathscr{E}$. Construire cet ensemble.

Exercice 4 (PT B 2006 partie C)

On note F et F' les points de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,0)$.
k désignant un réel strictement positif, on note Γ_k l'ensemble des points M du plan tels que

$$MF.MF' = k$$

1) Former une équation cartésienne de Γ_k (on éliminera les radicaux).

2) Déterminer le nombre de points d'intersection de Γ_k avec l'axe des abscisses.

3) Soit M un point quelconque du plan.

a) Montrer que : $MF^2 + MF'^2 = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2$

b) Montrer que : $MF^2 + MF'^2 = (MF - MF')^2 + 2MF.MF'$

c) En déduire que pour tout point M de Γ_k on a : $k - 1 \leqslant OM^2 \leqslant k+1$.

4) Déterminer les éléments de symétrie de Γ_k.

5) On désigne par $\mathscr{C}_k$ l'arc de Γ_k situé dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
Montrer que la courbe $\mathscr{C}_k$ admet une équation cartésienne de la forme $y = \varphi_k(x)$, où φ_k désigne une fonction que l'on déterminera.

6) On se propose d'étudier la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_k(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2+k^2}-(x^2+1)}$$

a) Déterminer le domaine de définition D_k de la fonction proposée.

b) Déterminer la dérivée f_k' de f_k. Étudier la dérivabilité de f_k aux bornes de D_k.

c) Étudier le signe de f_k'.

d) Dresser le tableau de variation de f_k.

7) Tracer avec soin les courbes Γ_k pour $k = \dfrac{1}{2}$, $k = \dfrac{3}{2}$ et $k = 2$.

Exercice 5

Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie implicitement par l'équation

$$x^y y^x = y^y \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

1) Pour tout réel $t > 0$, étudier l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$. En déduire un paramétrage de la courbe $\mathscr{C}$. (On vérifiera que tous les points de $\mathscr{C}$ ont été paramétrés).

2) Étudier les variations de x et y en fonction de t.

3) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

FIN DE L'ÉPREUVE