Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ et la droite D d'équation $y = -x$.
Pour un point N de D de coordonnées $(t, -t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).
Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ.

1) En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).

2) En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite Δ.

3) Pour quelles valeurs de t les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2.

4) Calculer en fonction de t les coordonnées du point M, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.

5) Soit Γ la courbe d'équation paramétrique

$$x(t) = \frac{t+1}{-t+1} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{-t+1}{t+1}$$

a) Préciser les domaines de définition de x et y.

b) Donner un tableau de variations conjointes de x et y en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.

c) Préciser la nature des éventuelles branches infinies.

d) Tracer Γ et ses asymptotes.

6) **a)** Le point A appartient-il à Γ ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?

b) Le point B appartient-il à Γ ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?

7) **a)** Calculer $x(t)y(t)$. Que remarque-t-on ?

b) On appelle $\mathcal{H}$ la courbe d'équation cartésienne $y = \dfrac{1}{x}$. Comparer $\mathcal{H}$ et Γ.

Exercice 2

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\,\mathrm{ch}\,(t) \\ y(t) &= 3\,\mathrm{sh}\,(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Étudier les symétries de Γ, puis les variations de x et y.

b) Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ. Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.

c) Déterminer le repère de Frenet $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

d) Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

e) Déterminer une équation de la développée de Γ.

2) On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{13}{2}\operatorname{ch}^3(t) \\ y(t) & = & -\dfrac{13}{3}\operatorname{sh}^3(t) \end{array}\right.$$

a) Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.

b) Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.

c) Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.

d) Tracer Γ' sur la même figure que Γ.

e) Montrer les relations

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}(2t) & = & \operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) = 2\operatorname{ch}^2(t) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(t) + 1 \\ \operatorname{sh}(2t) & = & 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) \end{array}$$

En déduire la longueur de l'arc Γ' entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 3

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathscr{C}$ en au point $M_{\mathscr{C}}$ de coordonnées $(2\cos t, 2\sin t)$.

2) Soit $t \in]0, 2\pi[$. Soit P le point de coordonnées $(2, 0)$, et M le projeté orthogonal de P sur la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathscr{C}$ en $(2\cos t, 2\sin t)$. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.

On considère désormais la courbe Γ d'équation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = 1 + 2\cos t - \cos(2t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$$

3) Étude de Γ

a) Déterminer des symétries éventuelles de Γ.

b) Étudier les variations de x et y.

c) Déterminer les coordonnées et la nature du point singulier. On précisera une équation de la tangente en ce point.

d) Tracer Γ.

4) Développée.

a) Déterminer une équation paramétrique de la droite normale en $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$, pour $t \in]0, \pi]$.

b) En déduire une équation de la développée Γ' de Γ.

c) Montrer que Γ' est l'image de Γ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport suivie d'une translation dont on précisera le vecteur $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{i}$.

FIN DE L'ÉPREUVE