

Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (Centrale TSI 2011 - Mathématiques 2, UPS¹)

Notations : $\text{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f . $\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. **I**

Préliminaires - endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

- I. A. 1)** $0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = 0_E$
 $\Leftrightarrow \text{Ker } f \neq \{0_E\}$
 $\Leftrightarrow f \text{ non injective.}$

Donc :

$$0 \notin \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ injective.}$$

- 2)** Comme E est dimension finie, f est injective si et seulement si f est bijective. Donc :

$$0 \notin \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f \in GL(E).$$

- 3)** Moyennant l'identification rappelée entre $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL(E)$, M est inversible si et seulement si l'endomorphisme f , de matrice M dans la base $\mathcal{B}$, est inversible, ce qui équivaut à $0 \notin \text{Sp}(f)$ ou encore $0 \notin \text{Sp}(M)$. Donc :

$$M \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(M).$$

B. 1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc :

$$k(N) = 3.$$

- 2) a)** Comme M est semblable à N , il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = P^{-1}NP$.

On a alors $\forall p \in \mathbb{N}, M^p = (P^{-1}NP)^p = P^{-1}N(PP^{-1})N \dots NP = P^{-1}N^pP$ par récurrence sur p . Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, M^p \text{ et } N^p \text{ sont semblables.}$$

- b)** Si N est nilpotente et M est semblable à N , sous les notations précédentes,

$\forall p \in \mathbb{N}, M^p = P^{-1}N^pP$ et $\forall p \in \mathbb{N}, M^p = 0 \Leftrightarrow N^p = 0$. On en déduit que :

$$M \text{ est nilpotente et } k(M) = k(N).$$

- 3)** Notons $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est inversible, $M = P^{-1}NP$ et les matrices M et N sont semblables, donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \text{ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

1. Source : corrigé (très légèrement modifié) du site de l'UPS. Auteur : Pierre BRON, Lycée Chaptal, 22000 St Brieuc.

4) a) Soient i et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j \leq i + 1$. On a alors :

$$n_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n n_{ik} n_{kj} = \sum_{k=i+1}^n n_{ik} n_{kj} \quad \text{car} \quad k \leq i \Rightarrow n_{ik} = 0$$

Donc $i + 1 \leq k$ or $j \leq i + 1$ donc $j \leq k$ d'où $n_{kj} = 0$.

Donc en particulier, $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et $n_{ij}^{(2)} = 0$ si $j \leq i + 1$.

b) $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ est stable par produit, donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})}$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (j \leq i + k - 1 \Rightarrow n_{ij}^{(k)} = 0)$$

est vraie pour tout $k \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: la propriété s'écrit $N^0 = I_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, ce qui est vrai.
- $\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Par définition du produit matriciel,

$$n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^n n_{i\ell}^{(k)} n_{\ell j} = \sum_{\ell=i+k}^{j-1} n_{i\ell}^{(k)} n_{\ell j}$$

Car $n_{i\ell}^{(k)} = 0$ dès que $\ell \leq i + k - 1$ ($\mathcal{H}_{k+1}$), et $n_{\ell j} = 0$ dès que $j \leq \ell$ (définition de N). Cette somme est vide, et donc nulle, pour $i + k > j - 1$, c'est-à-dire, comme nous sommes dans les entiers, lorsque $j - 1 \leq i + k - 1$.

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (j \leq i + k - 1 \Rightarrow n_{ij}^{(k)} = 0)}$

c) Pour $k = n$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i + k - 1 = i + n - 1 \geq n$ et $j \leq i + k - 1$. Donc $n_{ij}^{(n)} = 0$, ce qui montre :

$$\boxed{N^n = 0 \text{ et } N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})}$$

5) a) $\chi_f(X) = \chi_N(X) = \prod_{i=1}^n (n_{ii} - X)$. Donc :

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{n_{ii}/i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}}$$

b) Comme χ_f est scindé, il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

- Si 0 est la seule valeur propre de N , d'après I.B.5.a), $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $n_{ii} = 0$. Ainsi, d'après I.B.4.c), $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et f est nilpotent.

- Réciproquement, si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et λ est valeur propre de N , il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $NX = \lambda X$. En outre, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.

On a alors $N^k X = \lambda^k X = 0$; or $X \neq 0$, d'où $\lambda = 0$.

Comme les valeurs propres de f sont celles de N , j'ai montré :

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \text{Sp}(f) = \{0\}}$$

6) Soit $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. D'après I.B.5.b), N est nilpotente si et seulement si $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

Comme d'après I.B.5.a), $\text{Sp}(N) = \{n_{ii}/i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$,

$$\boxed{N \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_{ii} = 0.}$$

C. 1) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Posons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

On a alors $M' = P^{-1}MP$ et $\text{Tr}(M') = \text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(MPP^{-1}) = \text{Tr}(M)$

(car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Donc, $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est indépendant de $\mathcal{B}$.

2) L'on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

On a alors $\text{Sp}(f) = \{n_{kk}/k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \{\lambda_k/k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Donc :

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n n_{kk} = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

3) Comme $\text{Tr}(A) = 0$, A admet deux valeurs propres opposées.

- Si elles sont non nulles, elles sont distinctes et A est diagonalisable.

- Si elles sont nulles, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure B dont la diagonale est formée des valeurs propres de A et ne contient donc que des 0.

D'après la question I.B.4., B est nilpotente et d'après I.B.2.b), A l'est aussi.

J'ai montré :

A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

Le « ou » n'est pas exclusif. La matrice $A = 0$ est à la fois nilpotente et diagonalisable (c'est la seule).

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A n'est pas nilpotente puisque quelle est triangulaire supérieure et que l'un des coefficients diagonaux est non nul.

Ses valeurs propres sont 1 et -2 .

Son sous-espace propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre 1 a pour équation : $\begin{cases} y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$. Il est de dimension 1 alors que la valeur propre est d'ordre de multiplicité 2. Donc A n'est pas diagonalisable.

Lorsque $n = 3$, il existe des matrices ni diagonalisables, ni nilpotentes.

II Exponentielle d'un endomorphisme

II. A. 1) a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

b) $\det(\exp(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$
 $= \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k}$
 $= \exp\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$
 $\neq 0$

Donc : $\exp(f) \in GL(E)$.

2) Soit f l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases de E telles que les matrices de passages respectives de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_2$ soient P_1 et P_2 .

Alors, comme $M = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et $M = P_2 D_2 P_2^{-1}$, l'on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = D_1$, respectivement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = D_2$; ces matrices étant diagonales, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de vecteurs propres de f . D'où, d'après la définition de $\exp(f)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\exp(f)) = \exp(D_1) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\exp(f)) = \exp(D_2)$$

ce qui prouve : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = P_1 \exp(D_1) P_1^{-1} = P_2 \exp(D_2) P_2^{-1}$. Conclusion :

$$P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2 \exp(D_2)P_2^{-1}.$$

B. 1) D'après la question I.B.4.a), M^k est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont nuls

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'où les termes diagonaux de $\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!}$ sont ceux de $\frac{M^0}{0!} = I_n$.

Les termes diagonaux de $\exp(M)$ sont donc tous égaux à 1.

2) Les valeurs propres de $\exp(f)$ sont celles de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, égale à $\exp(M)$. Or $\exp(M)$ est triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale ; d'où :

Donc $\text{Sp}(\exp f) = \{1\}$ (valeur propre d'ordre n).

Comme $\det(\exp(f)) = 1$ (produit des termes de la diagonale), $\exp(f) \in GL(E)$.

C. La propriété (P) est vraie pour tout endomorphisme f en dimension finie, et s'appelle la décomposition de Dunford.

1) a) On note $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ pour l'endomorphisme f .

- Montrons que $E_\lambda(d) \subset E_{\exp(\lambda)}(\exp d)$.

Soit $x \neq 0$ vecteur propre de d associé à la valeur propre λ .

La famille libre (x) peut se compléter en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de d ; donc par définition (II.A), $\exp(d)(x) = e^\lambda x$ et $x \in E_{\exp(\lambda)}(\exp d)$.

Ainsi, $E_\lambda(d) \subset E_{\exp(\lambda)}(\exp d)$.

- Montrons que $\exp d$ et g commutent.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de d associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\begin{aligned} \text{L'on a } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad d(g(e_i)) &= d \circ g(e_i) = g \circ d(e_i) \\ &= g(\lambda_i e_i) \\ &= \lambda_i g(e_i) \end{aligned}$$

D'où $g(e_i) \in E_{\lambda_i}(d)$. Or d'après ci-dessus, $E_{\lambda_i}(d) \subset E_{\exp(\lambda_i)}(\exp d)$:

$$\exp(d) \circ g(e_i) = \exp(d)(g(e_i)) = \exp(\lambda_i)g(e_i)$$

Un calcul direct donne $g \circ \exp(d)(e_i) = g(\exp(\lambda_i)e_i) = \exp(\lambda_i)g(e_i)$.

Les endomorphismes $g \circ \exp(d)$ et $\exp(d) \circ g$ prennent les mêmes valeurs sur une base de E : ils sont donc égaux.

- On en déduit, par une récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall p \in \mathbb{N}, g^p \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g^p$.

En prenant une combinaison linéaire, $\sum_{p=0}^{k(g)} \frac{g^p}{p!} \circ \exp(d) = \sum_{p=0}^{k(g)} \exp(d) \circ \frac{g^p}{p!}$, ce qui équivaut,

en factorisant par $\exp d$, à $\left(\sum_{p=0}^{k(g)} \frac{g^p}{p!} \right) \circ \exp(d) = \exp(d) \circ \left(\sum_{p=0}^{k(g)} \frac{g^p}{p!} \right)$ c'est-à-dire

$$\exp(d) \circ \exp(g) = \exp(g) \circ \exp(d)$$

b) L'isomorphisme canonique entre $L(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montre que, d'après l'unicité de la décomposition d'un endomorphisme de $\Gamma_n(E)$ comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent que :

$$\forall M \in \Gamma_n(\mathbb{C}), \exists ! (D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \text{ tel que } \begin{cases} D \text{ soit diagonalisable,} \\ N \text{ soit nilpotente et} \\ M = D + N \end{cases}$$

2) Posons $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente. On a alors $PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$.

PDP^{-1} est diagonalisable car elle est semblable à une matrice diagonale, PNP^{-1} est nilpotente d'après la question I.B.2.b).

Par ailleurs $(PDP^{-1})(PNP^{-1}) = P(DN)P^{-1} = P(ND)^{-1} = (PNP^{-1})(PDP^{-1})$.

Donc $\boxed{PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})}$.

L'on a alors :

$$\begin{aligned} \exp(PDP^{-1}) &= \exp(PP_1D_1P_1^{-1}P^{-1}) && \text{où } D_1 \text{ est diagonale} \\ &= (PP_1)\exp(D_1)(PP_1)^{-1} && \left(\begin{array}{l} \text{définition de l'exponentielle d'un} \\ \text{endomorphisme diagonalisable} \end{array} \right) \\ &= P(P_1\exp(D_1)P_1^{-1})P^{-1} \\ &= P\exp(D)P^{-1} && \text{(II.A.2))} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exp(PNP^{-1}) &= \sum_{p=0}^{k(PNP^{-1})} \frac{(PNP^{-1})^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{k(N)} \frac{PN^pP^{-1}}{p!} && \left(\begin{array}{l} \text{I.B.2)b) : les indices de nilpotence de deux} \\ \text{endomorphismes nilpotents semblables sont égaux} \end{array} \right) \\ &= P \left(\sum_{p=0}^{k(N)} \frac{N^p}{p!} \right) P^{-1} \\ &= P\exp(N)P^{-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \exp(PMP^{-1}) &= \exp(PDP^{-1})\exp(PNP^{-1}) \\ &= P\exp(D)P^{-1}P\exp(N)P^{-1} \\ &= P\exp(D)\exp(N)P^{-1} \\ &= P\exp(M)P^{-1} \end{aligned}$$

J'ai montré :

$$\boxed{\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}}$$

III Le cas $n = 2$

III. A. 1) Si les valeurs propres λ et μ de f étaient distinctes, le polynôme caractéristique de f serait scindé à racine simples, et f serait donc diagonalisable. Comme f est supposé non diagonalisable,

$$\boxed{\lambda = \mu}$$

La multiplicité de λ est 2, donc $1 \leq \dim E_\lambda \leq 2$.

Si $\dim E_\lambda = 2$, alors $E_\lambda = E$ et f est une homothétie, diagonalisable. Donc $\boxed{\dim E_\lambda = 1}$.

La seule valeur propre de $f - \lambda \text{id}_E$ est donc 0 et d'après I.B.5), $f - \lambda \text{id}_E$ est nilpotent. Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de $f - \lambda \text{id}_E$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'après la question I.B.5).

Or $M^2 = 0$. Donc :

$$\boxed{(f - \lambda \text{id}_E)^2 = 0}$$

2) $(f - \lambda \text{id}_E)^2 = f^2 - 2\lambda f + \lambda^2 \text{id}_E = 0$, donc $f^2 = 2\lambda f - \lambda^2 \text{id}_E$.

Puisque $f(v) \neq \lambda v$, $u \neq 0_E$.

$$\begin{aligned} f(u) &= f^2(v) - \lambda f(v) \\ &= (2\lambda f - \lambda^2 \text{id}_E)(v) - \lambda f(v) \\ &= \lambda f(v) - \lambda^2 v \\ &= \lambda u \end{aligned}$$

D'où $\boxed{u \in E_\lambda \setminus \{0_E\}}$.

Par définition, $v \notin E_\lambda$ et $u \in E_\lambda$, $u \neq 0$. Donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : (u, v) est libre. Comme $\dim E = 2$,

$$\boxed{(u, v) \text{ est une base de } E}$$

On a alors $f(u) = \lambda u$ ($u \in E_\lambda$) et $f(v) = u + \lambda v$ (par définition de u). Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

B. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice du type $D(a, b)$.

Si A n'est pas diagonalisable, soit (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base (e_1, e_2) . Comme A n'est pas diagonalisable, f ne l'est pas et d'après la question III.A., il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f admet une matrice du type $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = M(\lambda)$. Donc A est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$. On a montré :

$$\text{Tout élément de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de } J_2(\mathbb{C}).$$

C. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $D(a, b) = D(a, b) + N$ avec $N = 0$, donc N est nilpotente et $DN = ND : D(a, b) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$.

$$\forall a \in \mathbb{C}, M(a) = aI_2 + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors aI_2 est diagonale et $N^2 = 0$, donc N est nilpotente ; enfin $(aI_2)N = N(aI_2) = aN : M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où :

$$J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C}).$$

$$\exp(D(a, b)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \text{ par définition de l'exponentielle d'une matrice diagonale.}$$

$$\begin{aligned} \exp(M(a)) &= \exp(aI_2) \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \exp(M(a)) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

D. On a bien sur $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. M est alors semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc de $\Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où d'après II.C.2), $M \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où :

$$\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

E. 1) Le polynôme caractéristique de $A(\theta)$ est $\chi_{A(\theta)} = X^2 + \theta^2$ et $\text{Sp}(A(\theta)) = \{i\theta, -i\theta\}$.

Ses deux valeurs propres étant distinctes, $A(\theta)$ est diagonalisable. Ses deux sous-espaces propres sont :

$$- E_{i\theta}(A(\theta)) \text{ d'équation } -i\theta x - \theta y = 0 \Leftrightarrow y = -ix, \text{ d'où } E_{i\theta}(A(\theta)) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

$$- E_{-i\theta}(A(\theta)) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{D'où } A(\theta) = P \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
\exp(A(\theta)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & ie^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i \cos \theta & -2i \sin \theta \\ 2i \sin \theta & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'on trouve la matrice d'une rotation. Pourquoi ? Qualitativement, dans la base $(z, \bar{z})$, la matrice A représente la multiplication par $i\theta$ (selon z). Lorsqu'on passe à l'exponentielle, ça se transforme en multiplication par $e^{i\theta}$, c'est-à-dire la rotation d'angle θ .

2) L'on a alors $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A(0) \neq A(2\pi)$, $\exp$ n'est pas injective.

3) Une matrice M de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est de la forme $D(a, b)$ avec $ab \neq 0$ ou $M(a)$ avec $a \neq 0$.

- Si M est de la forme $D(a, b)$; posons $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors } M &= \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a|) + i\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(\ln(|b|) + i\beta) \end{pmatrix} \\
&= \exp \begin{pmatrix} \ln(|a|) + i\alpha & 0 \\ 0 & \ln(|b|) + i\beta \end{pmatrix} \\
&= \exp(D(\ln(|a|) + i\alpha, \ln(|b|) + i\beta)).
\end{aligned}$$

- Si M est de la forme $M(a)$; posons $a = |a|e^{i\alpha}$ et $\lambda = \ln(|a|) + i\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\text{On a alors } M = \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a|) + i\alpha) & 1 \\ 0 & \exp(\ln(|a|) + i\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 1 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et l'on a vu III.B. que cette matrice

est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 1 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \exp(M(\lambda)).$$

J'ai montré :

Tout élément de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

4) Soit $M \in GL_2(\mathbb{C})$; d'après la question III.B., il existe $P_1 \in GL_2(\mathbb{C})$ et $M_1 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que $M = P_1 M_1 P_1^{-1}$. Comme M est inversible, M_1 l'est aussi et $M_1 \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$.

D'après la question III.E.2), il existe $P_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ et $M_2 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que

$$M_1 = P_2 \exp(M_2) P_2^{-1}.$$

D'où $M = (P_1 P_2) \exp(M_2) (P_1 P_2)^{-1} = P \exp(M_2) P^{-1}$ en posant $P = P_1 P_2$, matrice inversible.

$M_2 \in \Gamma_2(\mathbb{C})$: d'après II.C.2), $P M_2 P^{-1} \in \Gamma_2(\mathbb{C})$ et $P(\exp M_2)P^{-1} = \exp(P M_2 P^{-1})$.

D'où $M = \exp(P M_2 P^{-1})$ et

$$\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \text{ est surjective.}$$

F. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; alors M est semblable à une matrice M_1 de $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

Si M_1 est de la forme $D(a, b)$, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M_1) = a + b$; $\exp(M)$ est semblable à $D(e^a, e^b)$; donc $\det(\exp(M)) = e^{a+b} = \exp(\text{Tr}(M))$.

Si M_1 est de la forme $M(a)$, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M_1) = 2a$; $\exp(M)$ est semblable d'après II.C.2) à $\exp(M_1) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$; donc $\det(\exp(M)) = e^{2a} = \exp(\text{Tr}(M))$.

J'ai montré :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \det(\exp(M)) = \exp(\text{Tr}(M)).}$$

G. 1) - Les matrices de $SL_2(\mathbb{C})$ sont de déterminant non nul, donc inversibles.

- $SL_2(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ car $I_2 \in SL_2(\mathbb{C})$

- Soit M_1 et $M_2 \in SL_2(\mathbb{C})$. $\det(M_1 M_2^{-1}) = \det(M_1) / \det(M_2) = 1$ donc $M_1 M_2^{-1} \in SL_2(\mathbb{C})$.

Donc $\boxed{SL_2(\mathbb{C}) \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{C})}$.

Si $M \in L_0(\mathbb{C})$, $\det(\exp(M)) = \exp(\text{Tr}(M)) = 1$, donc $\exp(M) \in SL_2(\mathbb{C})$.

2) Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$; d'après I.C.3), M est soit diagonalisable, soit nilpotente.

- si elle est diagonalisable, elle est semblable à une matrice $D(a, b)$ de même trace, qui vérifie donc $b = -a$.

- si elle est nilpotente et non diagonalisable, elle est semblable d'après la question III.B. à une matrice du type $M(a)$ de trace nulle, qui vérifie donc $a = 0$.

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Tout élément de } L_0(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice du type } D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \\ \text{avec } a \in \mathbb{C} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}}$$

3) $\det N' = 1$: $\boxed{N' \in SL_2(\mathbb{C})}$.

On remarque aussi que N' n'est pas diagonalisable (sinon elle serait déjà diagonale).

Supposons $N' = \exp(N_1)$ avec $N_1 \in L_0(\mathbb{C})$.

- Si N_1 est semblable à une matrice du type $D(a)$, $\exp(N_1)$ est semblable à $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$ et N' est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

- Si N_1 est semblable à N , $N' = \exp(N_1)$ est semblable à $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\text{Tr}(N') = \text{Tr}(\exp(N)) = 2$, or $\text{Tr}(N') = -2$, ce qui absurde.

Donc N' n'appartient pas à l'image de $\widetilde{\exp}$: $\widetilde{\exp}$ n'est pas surjective.

Par ailleurs, les matrices $A(\theta)$ appartiennent à $L_0(\mathbb{C})$; comme $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi))$ et $A(0) \neq A(2\pi)$, $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective. D'où :

$$\boxed{\widetilde{\exp} \text{ n'est ni surjective, ni injective.}}$$

IV Le cas $n = 3$

IV. A. f admet 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes et $\dim E = 3$; donc f est diagonalisable : il s'écrit $f + 0$ où 0 représente l'endomorphisme nul qui est nilpotent et, par ailleurs, f et l'endomorphisme nul commutent, donc :

$$\boxed{f \in \Gamma_3(E)}.$$

B. 1) Le polynôme caractéristique de f étant scindé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit

$$\text{de la forme } \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$f - \lambda \text{id}_E$ admet alors pour matrice dans $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice nilpotente d'après la question I.B.4)c). D'où :

$$\boxed{f - \lambda \text{id}_E \text{ est nilpotent.}}$$

- 2) On a $f = \lambda \text{id}_E + (f - \lambda \text{id}_E)$. Comme λid_E est diagonalisable, $f - \lambda \text{id}_E$ est nilpotent et λid_E et $f - \lambda \text{id}_E$ commutent,

$$\boxed{f \in \Gamma_3(E).}$$

- C. 1) Le polynôme caractéristique de f étant scindé, f est trigonalisable. Donc il existe une base (e_1, e_2, e_3) telle que $\text{Mat}_e(f)$ soit triangulaire supérieure. Les valeurs propres de f sont alors sur la diagonale et :

$$\boxed{\begin{aligned} &\exists a, b, c \in \mathbb{C}, \exists (e_1, e_2, e_3) \text{ tels que } \text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \\ &\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{cases} \end{aligned}}$$

- 2) $\det_e(e_1, e_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc (e_1, e_2, e'_3) est une famille libre maximale :

$$\boxed{(e_1, e_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$$

- 3) • $f(e'_3) = f(e_3) + \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$
 $= (b e_1 + c e_2 + \nu e_3) + (\alpha \lambda e_1) + \beta (a e_1 + \lambda e_2)$
 $= (b + \alpha \lambda + \beta a) e_1 + (c + \beta \lambda) e_2 + \nu e_3$
 • $\nu e'_3 = \nu \alpha e_1 + \nu \beta e_2 + \nu e_3$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } f(e'_3) = \nu e'_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} b + \alpha \lambda + \beta a = \nu \alpha \\ c + \beta \lambda = \nu \beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{ca}{(\nu - \lambda)^2} + \frac{b}{\nu - \lambda} \\ \beta = \frac{c}{\nu - \lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

(On sait que $\lambda \neq \nu$).

$$\boxed{\text{On a donc pu choisir } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } f(e'_3) = \nu e'_3.}$$

- 4) On a alors :

$$\boxed{M = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e'_3)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} .}$$

- 5) Soient D la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ et N la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $M = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente.

De plus $ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$M \in \Gamma_3(\mathbb{C}) \text{ ce qui montre aussi } f \in \Gamma_3(E).$$

D. Soit f un endomorphisme de E . On a alors les possibilités suivantes :

- ✓ f admet 3 valeurs propres deux à deux distinctes ; d'après IV.A., $f \in \Gamma_3(E)$;
- ✓ f admet 3 valeurs propres égales ; d'après IV.B.2), $f \in \Gamma_3(E)$;
- ✓ f deux valeurs propres distinctes, dont une double, d'après IV.C.5), $f \in \Gamma_3(E)$. (*f peut aussi être diagonalisable dans ce dernier cas, mais peu importe*)

Conclusion :

$$\Gamma_3(E) = L(E).$$

E. 1) Le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ vaut :

$$\chi_{R(\theta)} = -X(X^2 + \theta^2) \text{ et le spectre de } R(\theta) \text{ est } \{i\theta, -i\theta, 0\}.$$

Par des calculs analogues à ceux de III.E.1), on obtient :

$$R(\theta) = P \begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(R(\theta)) &= P \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

J'ai montré :

$$\exp(R(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Comme $\exp(R(0)) = \exp(R(2\pi))$ et que $R(0) \neq R(2\pi)$,

$$\exp : L(E) \rightarrow GL(E) \text{ n'est pas injective.}$$