Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Mathématique 2

TSI **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Notations et rappels

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On notera $L(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des automorphismes de E.
- À tout $f \in L(E)$, on associe sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.
  On rappelle que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
  De la même façon, $GL(E)$ s'identifie, moyennant l'isomorphisme précédent, à l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n qui sont inversibles.
  On rappelle également que $GL(E)$ (respectivement $GL_n(\mathbb{C})$), muni de la composition des applications (respectivement muni du produit des matrices), possède une structure de groupe.
- Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.
  Soit $f \in L(E)$. On sera amené à utiliser la propriété (T) suivante :
  (T) : il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$
- On rappelle que, par convention : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^0 = I$ (matrice identité).
- Soit $f \in L(E)$. Alors, f admet n valeurs propres en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.
- On rappelle enfin que l'exponentielle d'un nombre complexe z peut être noté e^z ou $\exp z$ et que, pour tout nombre complexe z, $\exp z \neq 0$.

I Préliminaires : endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I.A – Soit $f \in L(E)$.

I.A.1) Montrer que f est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.2) Montrer que $f \in GL(E)$ si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M.

I.B – Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif k tel que : $N^k = 0$ (matrice nulle).

On note $k(N)$ le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété et on l'appelle « indice de nilpotence de N ».

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.B.1) Soit N la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$ puis déterminer $k(N)$.

I.B.2) Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice semblable à N.

a) Montrer que, pour tout entier naturel p, M^p et N^p sont semblables.

b) En déduire que, si N est nilpotente, M l'est aussi et $k(M) = k(N)$.

I.B.3) Soit $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On dira alors que f est nilpotent et on notera $k(f)$ l'indice de nilpotence de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ qui sera appelé aussi indice de nilpotence de f.

I.B.4) Soient $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et n_{ij} son terme général.

On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!], n_{ii} = 0$.

On note $n_{ij}^{(k)}$ le terme général de la matrice N^k avec $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(2)} = 0$ si $j \leqslant i + 1$.

b) Montrer, plus généralement, que $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(k)} = 0$ si $j \leqslant i + k - 1$.

c) En déduire que $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

I.B.5) Soient $f \in L(E)$ et $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ la matrice de f dans une base appropriée $\mathcal{B}$ de E donnée par la propriété (T) rappelée en préliminaire.

a) En explicitant le polynôme caractéristique de N, déterminer les valeurs propres de f en fonction des termes diagonaux de N.

b) Montrer que f est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

I.B.6) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si tous ses termes diagonaux sont nuls.

I.C – Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que la trace de A est le nombre complexe $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

I.C.1) Soit $f \in L(E)$.

Montrer que le nombre complexe $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ dans E.

On appelle « trace de l'endomorphisme f » ce nombre complexe, noté $\mathrm{Tr}(f)$.

Ainsi on a, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

I.C.2) Soit $f \in L(E)$. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les valeurs propres (éventuellement égales) de f.

Montrer, à l'aide de la **question I.B.5 a**, que :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

I.C.3) On considère le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Montrer que A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

I.C.4) A-t-on le même résultat lorsque $n = 3$?

II Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $f \in L(E)$.

II.A – On suppose, tout d'abord, f diagonalisable, et on note $\mathcal{B}_p = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On définit alors l'endomorphisme $\exp f$ par l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_p$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\exp f)(e_i) = (\exp \lambda_i) e_i$$

II.A.1)

a) Représenter la matrice de $\exp f$ sur la base $\mathcal{B}_p$.

b) Montrer que $\exp f$ appartient à $GL(E)$.

Cet endomorphisme est appelé « exponentielle de l'endomorphisme f ». On admet qu'il ne dépend que de f et pas de la base de vecteurs propres de f utilisée pour le définir.

Si D est une matrice diagonale de termes diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$, on note $\exp D$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\exp \mu_1, \ldots, \exp \mu_n$.

II.A.2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est diagonalisable.

Soient P_1, P_2 deux matrices inversibles et D_1, D_2 deux matrices diagonales telles que :

$$M = P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

Montrer que $P_1 (\exp D_1) P_1^{-1} = P_2 (\exp D_2) P_2^{-1}$.

On appellera exponentielle de la matrice M, la matrice notée $\exp M$ égale à $P(\exp D)P^{-1}$ où (P, D) est un couple de matrices utilisé pour diagonaliser M.

II.B – On suppose maintenant que f est nilpotent, d'indice de nilpotence $k(f)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, selon la propriété (T).

On pose alors :

$$\begin{cases} \exp f = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{f^p}{p!} & \text{où } f^0\text{=identité de E} \\ \exp M = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!} & \end{cases}$$

II.B.1) Déterminer les termes diagonaux de la matrice $\exp M$.

II.B.2) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $\exp f$ puis montrer que $\exp f \in GL(E)$.

L'endomorphisme $\exp f$ est encore appelé l'exponentielle de f et la matrice $\exp M$ l'exponentielle de M.

II.C – On suppose enfin que f satisfait à la propriété (P) suivante :

$$(\mathrm{P}) : \exists (d,g) \in (L(E))^2,\ d \text{ diagonalisable, } g \text{ nilpotent, } d \circ g = g \circ d \,/\, f = d + g$$

On admettra que, si f satisfait à (P), alors le couple (d, g) donné par (P) est unique.

II.C.1)

a) Montrer que : $\exp d \circ \exp g = \exp g \circ \exp d$.

On pose alors : $\exp f = \exp d \circ \exp g$ et on l'appelle encore l'exponentielle de f.

On désigne par $\Gamma_n(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des endomorphismes f satisfaisant à (P).

De même, on désigne par $\Gamma_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices M qui peuvent s'écrire $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

b) Montrer que, pour toute matrice M de $\Gamma_n(\mathbb{C})$, le couple (D, N) associé est unique.

On pose $\exp M = \exp D \exp N$ et on l'appelle l'exponentielle de M.

II.C.2) Soient $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

Démontrer que $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et que $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$.

On a ainsi défini deux applications $\exp : \Gamma_n(E) \longrightarrow GL(E)$ et $\exp : \Gamma_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Notre but est maintenant d'étudier un peu plus précisément ces applications dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III Le cas $n = 2$

On suppose dans toute cette partie que E désigne un $\mathbb{C}$ espace-vectoriel de dimension 2.

III.A – Soient $f \in L(E)$, λ et μ ses valeurs propres, E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. On suppose f non diagonalisable.

III.A.1) Montrer que $\lambda = \mu$ et que $\dim E_\lambda = 1$.

Montrer, de plus, que $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$. (On pourra utiliser la **question I.B.5 a**).

III.A.2) Soient $v \in E$ un vecteur n'appartenant pas à E_λ et $u = f(v) - \lambda v$.

Montrer que $u \in E_\lambda \backslash \{0\}$ et que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de E. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

III.B – Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit les matrices suivantes :

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

On définit enfin le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$J_2(\mathbb{C}) = \left\{ D(a,b)\,,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \cup \{ M(a)\,,\ a \in \mathbb{C} \}$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C – Montrer que $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$ puis calculer $\exp D(a,b)$ et $\exp M(a)$ pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

III.D – Montrer que $\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On admettra de même que $\Gamma_2(E) = L(E)$.

L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

III.E –

III.E.1) Soient θ un réel non nul et $A(\theta)$ la matrice définie par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\exp A(\theta)$.

III.E.2) L'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est-elle injective ?

III.E.3) En utilisant la **question III.C**, montrer que toute matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

III.E.4) En déduire, en utilisant les questions **II.C.2**, **III.B** et **III.E.3**, que l'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est surjective.

III.F – Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,,\ \det\big(\exp M\big) = \exp\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$.

III.G – Soient $SL_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$ et $L_0(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle.

III.G.1) Montrer que $SL_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ et que :

$$\forall M \in L_0(\mathbb{C}),\ \exp M \in SL_2(\mathbb{C})$$

On considère maintenant la restriction $\widetilde{\exp} : L_0(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$.

III.G.2) Montrer, à l'aide de **I.C.3** et **III.B**, que tout élément de $L_0(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme :

$$D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \qquad \text{ou} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.G.3) Soit N' la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$N' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N' \in SL_2(\mathbb{C})$ et que N' n'appartient pas à l'image de l'application $\widetilde{\exp}$.
En déduire que $\widetilde{\exp}$ n'est ni injective, ni surjective.

IV Le cas $n = 3$

Dans toute cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3.
L'objectif est ici de montrer que l'on a encore, dans ce cas, les égalités : $L(E) = \Gamma_3(E)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = \Gamma_3(\mathbb{C})$.
Soient $f \in L(E)$, λ, μ et ν ses valeurs propres.

IV.A – On suppose que λ, μ et ν sont trois valeurs propres distinctes.
Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.B – On suppose que $\lambda = \mu = \nu$.

IV.B.1) Montrer que $f - \lambda Id_E$ est nilpotent.

IV.B.2) Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.C – On suppose que $\lambda = \mu$, $\mu \neq \nu$.

IV.C.1) Justifier l'existence de trois complexes a, b, c et d'une base (e_1, e_2, e_3) de E tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda e_1 \\ f(e_2) &= a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) &= b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{aligned}$$

IV.C.2) Étant donnés deux complexes α et β, on pose $e'_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$.
Montrer que (e_1, e_2, e'_3) est une base de E.

IV.C.3) Montrer qu'on peut choisir α et β de sorte que $f(e'_3) = \nu e'_3$.

IV.C.4) Représenter la matrice M de f sur la base (e_1, e_2, e'_3) ainsi obtenue.

IV.C.5) Montrer que $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$ et $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D – Montrer que $\Gamma_3(E) = L(E)$.
On admettra de même que $\Gamma_3(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

IV.E – Soient θ un réel non nul et $R(\theta) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.E.1) Calculer $\exp R(\theta)$.

IV.E.2) En déduire que l'application $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ n'est pas injective.

N.B : On pourrait montrer, par un procédé analogue à celui utilisé dans le cas $n = 2$, que $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ est encore surjective dans le cas $n = 3$.

• • • FIN • • •