Épreuve de Mathématiques 4

$\boxed{\text{Correction}}$

Exercice 1 (Ecricome BL 2011)

1) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P+Q)(X) &= \frac{1}{2}((\lambda P+Q)(X+1)+(\lambda P+Q)(X)) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda P(X+1)+Q(X+1)+\lambda P(X)+Q(X)) \\ &= \lambda f_n(P)(X)+f_n(Q)(X) \end{aligned}$$

Donc l'application f_n est linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1)$ est aussi de degré au plus n, donc $f_n(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X+1)+P(X)) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2) **a)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \qquad P(k) = (-1)^k P(0)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> est vraie par hypothèse.
- <u>$\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Comme $P \in \mathrm{Ker}\,(f_n)$, $f_n(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X+1)+P(X)) = 0$. Ainsi,
$$P(X+1) = -P(X)$$
Donc en $X = k$, il vient $P(k+1) = -P(k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad P(k) = (-1)^k}$

On pouvait aussi remarquer, comme un de vos camarade, que $(P(k))_k$ est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $P(0)$.

b) D'après 2)a), et par définition de S et T, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{S(2k) = P(2k) - P(0) = (-1)^{2k}P(0) - P(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T(2k+1) = (-1)^{2k+1}P(0) + P(0) = 0}$$

c) Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, S et T sont aussi des polynômes de degré au plus n. Or, d'après 2)b), ils ont une infinité de racines (respectivement les $(2k)$ et les $(2k+1)$), donc $S = T = 0$.

Ce qui signifie respectivement que $P(X) = P(0)$ et $P(X) = -P(0)$, donc $\boxed{P(X) = P(0) = 0}$.

En conclusion, $P \in \mathrm{Ker}\ f_n \Longrightarrow P = 0$ donc $\mathrm{Ker}\ f_n = \{0\}$: l'endomorphisme f_n est injectif, donc bijectif (on est en dimension finie). Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

3) **a)** <u>Méthode 1</u> : L'application f_n^{-1} est un isomorphisme, donc l'image d'une base par f_n^{-1} est une base. Or la famille $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base (c'est la base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$, donc

$$\boxed{\text{la famille } (E_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Méthode 2 : On montre que la famille (E_k) est libre, en calculant $f_n\Big(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k E_k\Big)$, et comme $\text{Card}\,(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est une base. *(Il faudrait détailler les calculs évidemment).*

Attention : lorsqu'on regarde une famille $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments d'un espace vectoriel E, on peut regarder soit **le nombre d'éléments***, c'est-à-dire* $\boxed{\mathbf{Card}(\mathbf{e_k})_{\mathbf{0\leqslant k\leqslant n}}}$*, ou bien le rang de $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, qui est la dimension de l'espace vectoriel engendré (et donc plus compliqué à calculer, égal au cardinal si la famille est libre).*

b) i) Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. Par définition de E_k, $f_n(E_k) = \dfrac{1}{2}(E_k(X+1) + E_k(X)) = X^k$.

Donc, en multipliant par 2, $\boxed{\forall k \in \{0,\dots,n\}, \quad E_k(X+1) + E_k(X) = 2X^k}$

ii) $f_n(1) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$ donc $\boxed{E_0 = f_n^{-1}(1) = 1}$.

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,n\}$, E_k (qui ne dépend pas de n) est de degré au plus n. Donc, en prenant $k = n$, il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est de degré au plus n, ce qui peut s'écrire aussi E_k est de degré au plus k (variable muette).
De plus, d'après 3)b)i) $E_k(X+1) + E_k(X) = 2X^k$, donc E_k est de degré au moins k. En conclusion $\boxed{\deg E_k = k}$

L'égalité trouvée en 3)b)i) s'écrit $\boxed{E_k(1) + E_k(0) = 0}$ en $X = 0$, <u>lorsque $k \geqslant 1$</u>.

iv) Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Par définition, $f_n(E_k) = \dfrac{1}{2}(E_k(X+1) + E_k(X)) = X^k$. En dérivant :

$$\frac{1}{2}(E_k'(X+1) + E_k'(X)) = kX^{k-1}$$

Donc, en divisant par k $(\neq 0)$, il vient $f_n(E_k'/k) = X^{k-1}$, puis $E_k'/k = f_n^{-1}(X^{k-1}) = E_{k-1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } k \in \{1,\dots,n\},\ E_k' = kE_{k-1}.}$

c) On utilise les résultats des questions b)ii), b)iv) et b)iii). *(Cette question pouvait donc se traîter sans avoir résolu les précédentes.)*

- $E_1' = E_0 = 1$, donc $E_1 = X + c$. Or $E_1(1) + E_1(0) = 1 + 2c = 0$, d'où $c = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{E_1 = X - \frac{1}{2}}$$

- $E_2' = 2E_1 = 2X - 1$, donc $E_2 = X^2 - X + c$. Or $E_2(1) + E_2(0) = 2c = 0$, d'où $c = 0$. Ainsi

$$\boxed{E_2 = X^2 - X}$$

- $E_3' = 3E_2 = 3X^2 - 3X$, donc $E_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + c$. Or $E_3(1) + E_3(0) = -\dfrac{1}{2} + 2c = 0$, d'où $c = \dfrac{1}{4}$. Ainsi

$$\boxed{E_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{E_1(0) = -\frac{1}{2}} \qquad \boxed{E_2(0) = 0} \qquad \boxed{E_3(0) = \frac{1}{4}}$$

4) Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. Posons $F_k(X) = (-1)^k E_k(1-X)$, et montrons que $f_n(F_k) = X^k$.
Par définition, $F_k(X+1) = (-1)^k E_k(1-(X+1)) = (-1)^k E_k(-X)$, donc

$$f_n(F_k) = \frac{1}{2}((-1)^k E_k(-X) + (-1)^k E_k(1-X)) = \frac{(-1)^k}{2}(E_k(-X+1) + E_k(-X)) = (-1)^k(-X)^k = X^k$$

Ainsi, $F_k = f_n^{-1}(X^k) = E_k$. Conclusion : $\boxed{\forall k \in \{0,\dots,n\}, \quad E_k(1-X) = (-1)^k E_k(X)}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En $X = 0$ l'égalité précédente s'écrit $E_{2p}(1) = E_{2p}(0)$. Or pour $k \geqslant 1$, d'après 3)b)iii), $E_k(0) + E_k(1) = 0$. D'où $E_{2p}(1) = E_{2p}(0) = 0$.
En $X = 1/2$ l'égalité précédente s'écrit $E_{2p-1}(1/2) = -E_{2p-1}(1/2)$, donc $E_{2p-1}(1/2) = 0$.
En résumé, $\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = E_{2p-1}(1/2) = 0}$

5) Le polynôme E_n est de degré n, donc la formule de Taylor est exacte au rang n et s'écrit

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{E_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Or d'après 3)b)iv), $E'_n = nE_{n-1}$, donc $E_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)E_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}$ (pour $k \geqslant n$). *(pour ajuster, tester pour $k = 1$, $k = 2$)*

$$\boxed{E_n(X)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} E_{n-k}(0)X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(0)X^k \boxed{= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0)X^{n-k}}$$

6) D'après 4), $E_4(0) = 0$. De plus, D'après 5) et 3)c),

$$E_4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} E_k(0)X^{4-k} = 1 \times X^4 + 4 \times \Big(-\frac{1}{2}\Big)X^3 + 0 + 4 \times \frac{1}{4}X + 0$$

Conclusion : $\boxed{E_4 = X^4 - 2X^3 + X}$ *(On peut vérifier que $E'_4 = 4E_3$)*

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3)b)iii), $E_n(0) = -E_n(1)$. Donc en remplaçant $E_n(1)$ à l'aide de 5), il vient

$$E_n(0) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0)1^{n-k} = \Big(-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(0)\Big) - E_n(0)$$

D'où, en passant $E_n(0)$ de l'autre coté et en divisant par 2, $\boxed{E_n(0) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(0)}$

8) $E_5(0) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} E_k(0) = -\dfrac{1}{2}$. De plus, $E'_5(X) = 5E_4(X)$ donc $\boxed{E_5(X) = X^5 - \dfrac{5}{2}X^4 + \dfrac{5}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}}$

Exercice 2 (Essec ECS 2011, CNM 2006)

Partie 1 (Préliminaires)

1) Soit $0 \in \mathscr{L}(E)$, $\forall u \in U$, $u \circ 0 = 0 = 0 \circ u$. Ainsi $0 \in C(U)$, qui est donc non vide.
Soit $(v_1, v_2) \in C(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall u \in U, \qquad \begin{aligned} u \circ (\lambda v_1 + v_2) &= \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 && (u \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u && (v_i \in C(U)) \\ &= (\lambda v_1 + v_2) \circ u \end{aligned}$$

Donc $\lambda v_1 + v_2 \in C(U)$.
Conclusion : $\boxed{C(U) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).}$
De plus $\mathrm{id}_E \in C(U)$, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E) \subset C(U)$, puis $\dim\big(\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E)\big) \leqslant \dim C(U)$.
Ainsi $\boxed{\dim C(U) \geqslant 1}$

2) Soit $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$u \circ P(u) = u \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1} = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \circ u = P(u) \circ u$$

Donc $P(u) \in C(u)$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(u)}$

3) Soit $v \in C(u)$.

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\implies u(x) - \lambda x = 0 \\ &\implies v(u(x) - \lambda x) = v(u(x)) - \lambda v(x) = v(0) = 0 \\ &\implies u \circ v(x) - \lambda v(x) = 0 && \text{(car } v \in C(u)\text{)} \\ &\implies (u - \lambda\,\mathrm{id}_E)(v(x)) = 0 \\ &\implies v(x) \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)}$

4) Remarquons que $u \in C(u)$ (cas particulier de 2), ou calcul immédiat).
Soit $w \in C(C(u))$: $\forall v \in C(u)$, $v \circ w = w \circ v$. Pour $v = u$, on a donc $u \circ w = w \circ u$: $w \in C(u)$.
Conclusion : $\boxed{C(C(u)) \subset C(u)}$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $v \in C(u)$, alors $u^k \circ v = v \circ u^k$. Soit $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$\forall v \in C(u), \quad v \circ P(u) = v \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k (v \circ u^k) = \sum_{k=0}^{d} a_k (u^k \circ v) = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \circ v = P(u) \circ v$$

Donc $P(u) \in C(C(u))$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(C(u))}$

Partie 2 (Étude d'un exemple)

1) **a)** F est le noyau de l'endomorphisme $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n)_{n\geqslant 0}$ de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Cette application est linéaire car le « shift » $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (a_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est linéaire.
Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

b) Soit $(a_n) = (a_0 q^n)$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On suppose $a_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, on pouvait se contenter d'étudier (q^n) : si $(q^n) \in F$, alors $\lambda(q^n) \in F$.

$$(a_n) \in F \iff 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$$

Or le polynôme $2x^3 + 3x^2 - 1$ a pour racine évidente $x = -1$. Factorisons par $(x + 1)$:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^2 + x - 1)(x + 1) = (2x - 1)(x + 1)^2$$

Les valeurs possibles de q sont donc -1 et $1/2$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les suites géométriques de } F \text{ sont de raison } 0,\ 1/2 \text{ et } -1.}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = 2(n+3)(-1)^{n+3} + 3(n+2)(-1)^{n+2} - n(-1)^n = (-1)^n\Big(-2(n+3) + 3(n+2) - n\Big) = 0$$

Ainsi, $\boxed{(\gamma_n) \in F}$.

c) L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à un triplet (a_0, a_1, a_2) associe la suite récurrente (a_n) de premiers termes a_0, a_1, a_2 et définie par $a_{n+3} = -\dfrac{1}{2}(3a_{n+2} - a_n)$ est injective et d'image F.
Injectivité : si $(a_n) = \varphi((a_0, a_1, a_2)) = (0)$, alors en particulier $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$.
De plus, $\operatorname{Im} \varphi = F$ par construction.
Donc, par le théorème du rang, $\boxed{\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3}$.
Montrons que la famille $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est libre : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1(\alpha_n) + \lambda_2(\beta_n) + \lambda_3(\gamma_n) = 0$$

En $n = 0$, 1 et 2 cette égalité nous donne $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{2} & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{4} & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$

En résolvant ce système, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(On pouvait aussi calculer le déterminant de la matrice sous-jacente, qui vaut $9/4 \neq 0$)

Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Or $\dim F = 3 = \mathrm{Card}\,\mathscr{B}$, donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

2) Soit u l'application définie pour $(a_n) \in F$ par $u((a_n)) = (b_n)$ avec $b_n = a_{n+1}$. (l'application u décale les termes de la suite vers la gauche).

a) Soit $(a_n) \in F$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$, et en posant $n = p + 1$ il vient

$$2a_{p+1+3} + 3a_{p+1+2} - a_{p+1} = 0 = 2b_{p+3} + 3b_{p+2} - b_p$$

Donc $(b_n) = u((a_n)) \in F$.
L'application u est linéaire : $u(\lambda(a_n) + (a'_n)) = u((\lambda a_n + a'_n)) = (\lambda a_{n+1} + a'_{n+1}) = \lambda u((a_n)) + u((a'_n))$.
Conclusion : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } F.}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est le décalage de k termes vers la gauche.

c) Posons $\boxed{P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1}$. Alors, pour tout $(a_n) \in F$,

$$P(u)((a_n)) = (2u^3 + 3u^2 - \mathrm{id}_F)((a_n)) = (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n) = (0)$$

(On note (0) la suite nulle, qui vaut 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$). Ainsi $P(u) = 0$.

d) Notons $u((a_n))_n$ le n-ième terme de la suite $u((a_n))$.

- $u((\alpha_n))_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$ donc $u((\alpha_n)) = \dfrac{1}{2}(\alpha_n)$.
- $u((\beta_n))_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$ donc $u((\beta_n)) = -(\beta_n)$
- $u((\gamma_n))_n = (n+1)(-1)^{n+1} = -n(-1)^n - (-1)^n$ donc $u((\gamma_n)) = -(\gamma_n) - (\beta_n)$

En conclusion, $\left\{\begin{array}{ccl} u((\alpha_n)) & = & \dfrac{1}{2}(\alpha_n) \\ u((\beta_n)) & = & -(\beta_n) \\ u((\gamma_n)) & = & -(\beta_n) - (\gamma_n) \end{array}\right.$

Ainsi, matriciellement, $\boxed{T = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (\alpha_n) \\ (\beta_n) \\ (\gamma_n) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u((\alpha_n)) & u((\beta_n)) & u((\gamma_n)) \end{array} \end{array}}$

Une récurrence (à faire) nous donne $\boxed{T^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Toujours **vérifier** *ses calculs : ici pour $k = 0$ (on trouve $T^0 = I_3$: OK !) et $k = 1$ ($T^1 = T$: OK !).*
Ici, on peut aussi calculer directement $T^k = \mathrm{Mat}\,(u^k, \mathscr{B})$ comme on a calculer T. Les calculs sont exactement du même type que ceux de T.

3) **a)** Soit $v \in C(u)$. Notons $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Matriciellement, $u \circ v = v \circ u$ s'écrit

$$T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & b/2 & c/2 \\ -d-g & -e-h & -f-i \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & -b & -b-c \\ d/2 & -e & -e-f \\ g/2 & -h & -h-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} T$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a/2 &=& a/2 \\ -d-g &=& d/2 \\ -g &=& g/2 \\ b/2 &=& -b \\ -e &=& -e-h \\ -h &=& -h \\ c/2 &=& -b-c \\ -f-i &=& -e-f \\ -i &=& -h-i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 0 \\ d &=& 0 \\ g &=& 0 \\ b &=& 0 \\ h &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ c &=& 0 \\ i &=& e \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ g &=& 0 \\ b &=& 0 \\ h &=& 0 \\ c &=& 0 \\ i &=& e=\mu \\ a &=& \lambda \\ f &=& \delta \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Mat}\,(v,\mathscr{B},\mathscr{B}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}}$.

Il y a des façons plus subtiles de procéder, en utilisant les sous-espaces stables et l'exercice numéro 6 de la feuille sur les matrices.

b) Réciproquement : soit $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}\,(v,\mathscr{B},\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

D'après ci-dessus (ce sont des équivalences), $v \in C(u)$.

c) D'après a) et b), l'application linéaire $v \mapsto \mathrm{Mat}\,(v,\mathscr{B},\mathscr{B})$ est une bijection de $C(u)$ (espace vectoriel d'après 1.1) dans $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\lambda,\mu,\delta) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Or ce dernier espace vectoriel est de dimension 3. Ainsi, $\boxed{\dim(C(u)) = 3}$.

d) Montrons que (I_3, T, T^2) est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bT + cT^2 = 0$.

$$aI_3 + bT + cT^2 = \begin{pmatrix} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c & -b+2c \\ 0 & 0 & a-b+c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4} &=& 0 \\ a-b+c &=& 0 \\ -b+2c &=& 0 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système nous donne $a=b=c=0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}_E, u, u^2) \text{ est libre dans } \mathscr{L}(F).}$

e) D'après 1.2, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. D'après 2.3)c), $\dim C(u) = 3$. Donc $\mathbb{R}[u]$ est de dimension finie comme sous-espace vectoriel de $C(u)$, et d'après 2.3)d) $\dim \mathbb{R}[u] \geqslant 3$. Ainsi,

$$3 \leqslant \dim \mathbb{R}[u] \leqslant \dim C(u) = 3$$

Donc $\dim \mathbb{R}[u] = \dim C(u)$. Or ces deux espaces sont inclus l'un dans l'autre : $\boxed{C(u) = \mathbb{R}[u]}$

Partie 3 (CNM 2006 : second exemple)

1) a) Soit $x \in E$. $u(x+u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = (u+u^3)(x) = 0$. Donc $x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}\ u$.

$(u^2+\mathrm{id}_E)(u^2(x)) = u^4(x) + u^2(x) = u((u^3+u)(x)) = u(0) = 0$. Donc $u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in E \qquad x+u^2(x) \in \mathrm{Ker}\ u \quad \text{et} \quad u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$.

Montrons que $E \subset \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$: Soit $x \in E$. D'après ci-dessus,

$$x = \underbrace{(x+u^2(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(u)} + \underbrace{(-u^2(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)$

Conclusion : $\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id}_E)}$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$: $u(x) = 0$ et $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = 0$.
Or $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = u^2(x) + x = x$. Ainsi $x = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) = \{0\}$.
De plus, d'après a), $E = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$. Conclusion : $\boxed{E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)}$

2) **a)** Soit $x \in F$. Montrons que $u(x) \in F$:

$$(u^2 + \operatorname{id}_E)(u(x)) = u^3(x) + u(x) = 0$$

Donc $u(x) \in F$. Ainsi, $\boxed{F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) \text{ est stable par } u.}$

(On vient en fait de montrer que $u(E) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$, ce qui est plus fort que $u(F) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$)

b) Soit $x \in F$. Par définition, $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = u^2(x) + x = 0$. Donc $v^2(x) = u^2(x) = -x$.
Ce qui signifie : $\boxed{v^2 = -\operatorname{id}_F}$

c) Comme $v^2 = -\operatorname{id}_F$, $\det(v^2) = \det(-\operatorname{id}_F) = (-1)^{\dim F}$. Or $\det(v^2) = (\det v)^2 > 0$.
Donc $\dim F$ est pair. Comme $F \subset E$, il nous reste deux possibilités : 0 ou 2.
Si $\dim F = 0$, alors $F = \{0\}$. Or $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$ d'après 1)b). Donc, dans ce cas, $E = \operatorname{Ker} u$, ce qui signifie $u = 0$. D'après l'énoncé, on a supposé $u \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{\dim(F) = 2}$

d) D'après 1)b), $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$, donc en passant aux dimensions $3 = \dim \operatorname{Ker} u + \dim F$.
Par conséquent $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u = 1}$ et $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$: $\boxed{u \text{ n'est pas injectif.}}$

3) **a)** Montrons que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$$

Comme $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_3) = -e_2$ (on est dans F), il vient $u(\alpha e_2 + \beta e_3) = \alpha e_3 - \beta e_2 = 0$.

Or $\left\{ \begin{array}{rcll} \alpha e_2 + \beta e_3 & = & 0 & (\times \beta) \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 & = & 0 & (\times \alpha) \end{array} \right. \implies (\beta^2 + \alpha^2) e_3 = 0.$

Comme $(\operatorname{Ker} u) \cap F = \{0\}$ (1)b)), $e_3 = u(e_2) \neq 0$, par conséquent $\beta^2 + \alpha^2 = 0$.
Finalement, $\alpha = \beta = 0$: la famille (e_2, e_3) est libre.
De plus, $\dim F = 2$, donc $\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } F.}$

b) (e_1) est une base de $\operatorname{Ker} u$, (e_2, e_3) est une base de F (3)a)) et $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$ (1)b)) donc

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } E.}$$

On a $\left\{ \begin{array}{rcll} u(e_1) & = & 0 & (\text{car } e_1 \in \operatorname{Ker} u) \\ u(e_2) & = & e_3 & (\text{par définition de } e_3) \\ u(e_3) & = & u^2(e_2) = -e_2 & (\text{car } e_2 \in F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)) \end{array} \right.$ Donc

$$\boxed{A = \operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) La matrice A est diagonale bloc. Étudions le bloc $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = -I_2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n} = (B^2)^n = (-1)^n I_2$ et $B^{2n+1} = B^{2n} B = (-1)^n B$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A^{2n+1} = (-1)^n A}$

(Comme $u^3 = -u$, on pouvait en déduire $u^{2n+1} = (-1)^n u$)

4) **a)** Soit $B = \text{Mat}(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où $v \in C(u)$. On procède comme au 2.3)a)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} = BA$$

Puis, $\left\{\begin{array}{rcl} -g & = & 0 \\ d & = & 0 \\ 0 & = & c \\ -h & = & f \\ e & = & i \\ 0 & = & -b \\ -i & = & -e \\ f & = & -h \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} g & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ i & = & e \\ h & = & -f \end{array}\right.$ Conclusion : $\boxed{B \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}.}$

b) De même qu'en 2.3)c), $\boxed{\dim C(u) = 3}$

c) Montrons que (I_3, A, A^2) est une famille libre. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bA + cA^2 = 0$.

$$aI_3 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-c & -b \\ 0 & b & a-c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ a-c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $a = b = c = 0$. Donc la famille (id_E, u, u^2) est libre, dans $C(u)$ de dimension 3 (d'après b)).

Conclusion : $\boxed{(\text{id}_E, u, u^2) \text{ est une base de } C(u).}$

Exercice 3 (PT A 2009 — extraits)

1) Soit $y \in \text{Im}\, p \cap \text{Ker}\, p$. Soit $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Ainsi, $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$ et $p(y) = 0$. Donc $y = 0$. D'où $\text{Ker}\, p \cap \text{Im}\, p = \{0\}$.

De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}\, p + \dim \text{Im}\, p = \dim E$, donc $\boxed{E = \text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p}$

2) $q^2 = (\text{id}_E - p)(\text{id}_E - p) = \text{id}_E - 2p + p^2 = \text{id}_E - p = q$ donc $\boxed{q \text{ est un projecteur de } E}$

- Soit $x \in \text{Ker}\, q$. $q(x) = x - p(x) = 0$ donc $x = p(x) \in \text{Im}\, p$. Ainsi, $\text{Ker}\, q \subset \text{Im}\, p$.
  Réciproquement, soit $x = p(y) \in \text{Im}\, p$. Alors $q(x) = x - p(x) = p(y) - p(p(y)) = p(y) - p(y) = 0$.
  Donc $x \in \text{Ker}\, q$. D'où $\text{Im}\, p \subset \text{Ker}\, q$.
  Conclusion : $\boxed{\text{Ker}\, q = \text{Im}\, p}$.
- *On peut utiliser la même méthode, par double inclusion, ou ruser.*
  L'application q est un projecteur de E, donc d'après le point précédent, $\text{Ker}\,(\text{id}_E - q) = \text{Im}\, q$.
  Or $\text{id}_E - q = \text{id}_E - (\text{id}_E - p) = p$. Conclusion : $\boxed{\text{Im}\, q = \text{Ker}\, p}$
- $p \circ q = p \circ (\text{id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0$ et de même $q \circ p = p - p^2 = 0$.

3) **a)** *Attention ! La composition, comme le produit matriciel, n'est pas commutative.* $p_1p_2 \neq p_2p_1$.

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_1 + p_2 - p_2p_1)(p_1 + p_2 - p_2p_1) \\ &= p_1^2 + p_1p_2 - p_1p_2p_1 + p_2p_1 + p_2^2 - p_2^2p_1 - p_2p_1^2 - p_2p_1p_2 + p_2p_1p_2p_1 \\ &= p_1 + 0 - (p_1p_2)p_1 + p_2p_1 + p_2 - p_2p_1 - p_2p_1 - p_2(p_1p_2) + p_2(p_1p_2)p_1 \\ &= p_1 + p_2 - p_2p_1 = q \end{aligned}$$

Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur de } E}$

b) Soit $x \in \text{Ker}\,(p_1) \cap \text{Ker}\,(p_2)$.

$$q(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_2(p_1(x)) = 0 + 0 - p_2(0) = 0$$

Donc $x \in \text{Ker}\, q$. Conclusion : $\boxed{\text{Ker}\,(p_1) \cap \text{Ker}\,(p_2) \subset \text{Ker}\, q}$

c) Soit $x \in \text{Ker}\, q$: $q(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_2p_1(x) = 0$.

- Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\ p_1$. Comme $q(x) = 0$, $p_1(x) = -p_2(x) + p_2p_1(x)$.
  Donc $p_1(p_1(x)) = p_1(x) = -p_1p_2(x) + p_1p_2(p_1(x)) = 0$ (car $p_1p_2 = 0$). D'où $x \in \mathrm{Ker}\ p_1$.
- Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\ p_2$. De même que ci-dessus, $p_2(x) = -p_1(x) + p_2p_1(x)$.
  Donc $p_2(p_2(x)) = p_2(x) = -p_2p_1(x) + p_2^2p_1(x) = -p_2p_1(x) + p_2p_1(x) = 0$. D'où $x \in \mathrm{Ker}\ p_2$.

Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\ p_1 \cap \mathrm{Ker}\ p_2$. Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) = \mathrm{Ker}\,(q)}$

Exercice 4 (PT A 2006 — extraits)

1) La matrice L est triangulaire inférieure lorsque $\boxed{\forall i < j\ \ell_{ij} = 0}$

La matrice U est triangulaire supérieure lorsque $\boxed{\forall i > j\ u_{ij} = 0}$

2) Soit (i, j) deux entiers tels que $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Par définition du produit matriciel, $a_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}u_{kj}$.

Or d'après 1), pour tout $k > i$ $\ell_{ik} = 0$ et pour tout $k > j$, $u_{kj} = 0$. Donc le produit $\ell_{ik}u_{kj}$ est nul dès que $k > j$ ou $k > i$, c'est-à-dire $k > \min(i, j)$. Conclusion :

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik}u_{kj}}$$

3)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Donc A est inversible.

4) **a)** Par hypothèse, $\ell_{ii} = 1$. Or $a_{11} = \ell_{11}u_{11}$ d'après 2), d'où $\boxed{u_{11} = a_{11} = 1}$

b) De même, pour tout $i \geqslant 1$, la formule trouvée en 2) s'écrit $a_{i1} = \ell_{i1}u_{11}$.
Donc ici, $\boxed{\forall i \in \{2, 3\} \quad \ell_{i1} = a_{i1}/a_{11} = 2}$

c) On a donc, jusqu'ici, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$.

La formule trouvée en 2) (i.e. le produit LU...) s'écrit pour tout $j \geqslant 1$, $a_{1j} = \ell_{11}u_{1j}$. Ainsi

$$\begin{array}{lcl} j = 2 & : & 2 = a_{12} = \ell_{11}u_{12} = u_{12} \implies \boxed{u_{12} = 2} \\ j = 3 & : & 2 = a_{13} = \ell_{11}u_{13} = u_{13} \implies \boxed{u_{13} = 2} \end{array}$$

De même, $1 = a_{22} = \ell_{21}u_{12} + \ell_{22}u_{22} = 2 \times 2 + u_{22}$ donc $\boxed{u_{22} = -3}$

Puis $2 = a_{23} = \ell_{21}u_{13} + \ell_{22}u_{23} = 2 \times 2 + u_{23}$ donc $\boxed{u_{23} = -2}$

Et $2 = a_{32} = \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} = 2 \times 2 - 3\ell_{32}$ donc $\boxed{\ell_{32} = 2/3}$

Le dernier coefficient de A permet de trouver u_{33} : $1 = u_{33} = \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + \ell_{33}u_{33} = 4 - \dfrac{4}{3} + u_{33}$ donc $\boxed{u_{33} = -5/3}$

Conclusion : $\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix}}$

(On vérifie la cohérence en calculant LU : on retrouve bien A)

5) Ce sont des systèmes triangulaires : les matrices s'inversent en partant respectivement de la première ligne et de la dernière ligne.

$$\boxed{L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/5 \\ 0 & -1/3 & 2/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}}$$

(Idem : on vérifie la cohérence en calculant LL^{-1} et UU^{-1})

6) L'équation s'écrit $LUX = Y$ donc de façon équivalente $UX = L^{-1}Y$ puis

$$X = U^{-1}L^{-1}Y = U^{-1}L^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \text{[finissez le calcul avec Maple !]}$$

FIN DE L'ÉPREUVE