Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (Ecricome BL 2011)

Soit f_n l'application définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels par la relation :

$$f_n(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X+1) + P(X))$$

1) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soient P un élément du noyau de f_n et S et T des polynômes définis par

$$S(X) = P(X) - P(0) \qquad \text{et} \qquad T(X) = P(X) + P(0)$$

a) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $P(n) = (-1)^n P(0)$

b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S(2k) = 0$ et $T(2k+1) = 0$.

c) En déduire que f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Soit (E_k) la famille de polynômes définie par

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \qquad E_k = f_n^{-1}(X^k)$$

a) Justifier que la famille $(E_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Prouver que

i) $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad E_k(X+1) + E_k(X) = 2X^k$

ii) $E_0 = 1$

iii) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, E_k est de degré k et $E_k(1) + E_k(0) = 0$.

iv) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $E_k' = kE_{k-1}$ (où E_k' est le polynôme dérivé de E_k).

c) Calculer explicitement E_1, E_2 et E_3, puis donner les valeurs de $E_1(0)$, $E_2(0)$ et $E_3(0)$.

4) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad E_k(1-X) = (-1)^k E_k(X)$
En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = E_{2p-1}(1/2) = 0$

5) Utiliser la formule de Taylor pour prouver que $E_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0) X^{n-k}$

6) En déduire l'expression explicite de E_4.

7) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n(0) = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(0)$.

8) Donner l'expression explicite de E_5.

Exercice 2 (Essec ECS 2011, CNM 2006)

Si U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, c'est-à-dire

$$C(U) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid \forall u \in U,\ u \circ v = v \circ u\}$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est noté $C(u)$ et appelé aussi le commutant de u. On a donc $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit $P = a_0 + a_1 X + \dots a_d X^d = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \dots a_d u^d = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$$

Où $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois). Enfin on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.
L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie 1 (Préliminaires)

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \in \mathbb{N}^*$; U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.

2) Montrer que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$. Si $v \in C(u)$, montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v. (c'est-à-dire que $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$).

4) Vérifier que $C(C(u)) \subset C(u)$, puis que $C(C(u))$ contient $\mathbb{R}[u]$.

Partie 2 (Étude d'un exemple)

Dans toute cette partie, on note : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles,

$$F = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0\right\}$$

Et $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\beta_n = (-1)^n$, $\gamma_n = n(-1)^n$.

1) Étude de F :

- **a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
- **b)** Déterminer les suites géométriques appartenant à F. Vérifier que $(\gamma_n) \in F$.
- **c)** Montrer que $\dim F = 3$. En déduire que $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est une base de F.

2) Soit u l'application définie pour $(a_n) \in F$ par $u((a_n)) = (b_n)$ avec $b_n = a_{n+1}$. (l'application u décale les termes de la suite vers la gauche).

- **a)** Montrer que u est un endomorphisme de F.
- **b)** Déterminer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **c)** En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que $P(u) = 0$.
- **d)** Montrer, en justifiant soigneusement, que la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$ de la question 1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Centre de u.

- **a)** Soit $v \in C(u)$. Montrer que $\operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

b) Réciproquement, si $v \in \mathscr{L}(u)$ tel que $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, vérifier que $v \in \mathscr{L}(E)$.

c) Que vaut $\dim(C(u))$?

d) Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $\mathscr{L}(E)$.

e) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie 3 (CNM 2006 : second exemple)

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u^3 + u = 0$$

1) **a)** Montrer que : $\forall x \in E,\ x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}\, u$ et $u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.
En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

b) Monter que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

2) **a)** Montrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$ est stable par u.

b) On note v la restriction de u à F. Montrer que $v^2 = -\,\mathrm{id}_F$.

c) En calculant $\det(v^2)$ de deux façons, prouver que $\dim(F) = 2$.

d) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et que u n'est pas injectif.

3) Soit e_1 une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et e_2 un élément non nul de F. On pose $e_3 = u(e_2)$.

a) Montrer que (e_2, e_3) est une base de F.

b) En déduire que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Quelle est la matrice A de u dans cette base ?

c) Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

4) Centre de u.

a) Soit $B = \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$, où $v \in C(u)$. Déterminer la forme de la matrice B.

b) En déduire la dimension de $C(u)$.

c) Montrer que (id_E, u, u^2) forme une base de $C(u)$.

Exercice 3 (PT A 2009 — extraits)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\ p$ et $\mathrm{Im}\ p$ sont supplémentaire dans E.

2) Soit $q = \mathrm{id}_E - p$. Montrer que q est un projecteur de E. Déterminer le noyau et l'image de q. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

3) Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

a) Montrer que si $p_1 \circ p_2 = 0$, alors q est un projecteur de E.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) \subset \mathrm{Ker}\ q$.

c) Montrer alors que $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) = \mathrm{Ker}\,(q)$.

Exercice 4 (PT A 2006 — extraits)

Soit L, U et $A = LU$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de coefficients respectifs ℓ_{ij}, u_{ij} et a_{ij}.

1) À quelle condition sur les ℓ_{ij} la matrice L est-elle triangulaire inférieure ? À quelle condition sur les u_{ij} la matrice U est-elle triangulaire supérieure ?

2) Nous supposerons dorénavant que U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ montrer que l'on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}$$

3) On considère désormais la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

4) On cherche une matrice U triangulaire supérieure et une matrice L triangulaire inférieure ayant de plus tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, telles que $A = LU$.

a) En utilisant la formule de la question 2 pour a_{11}, calculer u_{11}.

b) En exprimant ensuite a_{i1}, calculer ℓ_{i1} pour tout $i \leqslant 3$.

c) En continuant à utiliser la formule de la question 2, déterminer les coefficients de L et U.

5) Calculer U^{-1} et L^{-1}.

6) En déduire la solution de l'équation $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

FIN DE L'ÉPREUVE