Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (Centrale TSI 2010)

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. $L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Dans ce problème, on étudie des endomorphismes de E qui admettent une seule droite (vectorielle) stable et un seul plan (vectoriel) stable.
Rappel : un sous-espace F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F) \subset F$.

1) Soit $f \in L(E)$. Soit $a \in E$ un vecteur non nul de E et $D = \text{Vect}\,(a)$, la droite vectorielle de vecteur directeur a.

- **a)** Montrer que D est stable par f si et seulement si a est vecteur propre de f.
- **b)** En déduire que tout endomorphisme f de E admet au moins une droite stable.
- **c)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat précédent reste-t-il vrai dans $\mathbb{R}^n$, quel que soit n ? Décrire succinctement les différents cas.

2) Soit $f \in L(E)$ et P un plan stable par f. On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de P induit par f sur P, défini par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in P$.

- **a)** Montrer que le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ divise celui de f.
- **b)** Montrer que si $\widetilde{f}$ possède une droite vectorielle stable, alors f possède au moins deux droites stables en général, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.

3) Soit F un espace vectoriel réel de dimension 2 et $g \in L(F)$. On suppose que g ne possède pas de valeur propre réelle et on note M la matrice de g dans une base de F.

- **a)** Soit g' l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$, $\varepsilon_1 = (a, b)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ vérifiant :
$$g'(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad g'(\overline{\varepsilon_1}) = \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1} \qquad \text{où} \quad \overline{\varepsilon_1} = (\overline{a}, \overline{b})$$
- **b)** Montrer que $(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$ est une base de $\mathbb{C}^2$. Quelle est la matrice de g' dans cette base ?
- **c)** Montrer qu'il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ tels que $M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}$.
On admettra que, de la même manière, le résultat peut être obtenu avec des coefficients réels : il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que $M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}$.

4) **a)** Soit $f \in L(E)$ admettant un seul plan stable et une seule droite stable non incluse dans ce plan. Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f s'écrit :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y \\ 0 & Y & X \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, X, Y) \in \mathbb{R}^3,\ Y \neq 0$$

b) (admise) Soit $f \in L(E)$ de matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de E. Soit $\varphi : (x,y,z) \mapsto ax+by+cz$ une forme linéaire non nulle et $P = \operatorname{Ker} \varphi$.
On admet que P est stable par f si et seulement si (a,b,c) est un vecteur propre de l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ dans $\mathscr{B}_c$.

c) Soit $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

i. f admet une unique droite stable.

ii. f admet un unique plan stable.

iii. Le polynôme caractéristique de f admet une seule racine réelle soit simple, soit triple, et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Exercice 2 (CCP PC 2010)

Notations et objectifs :
Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
$\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.
Pour tout endomorphisme f, $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.
On notera $\mathscr{R}(f) = \{h \in \mathscr{L}(E) \mid h^2 = f\}$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_p est la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème[1] est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathscr{R}(f)$.
Les quatre parties sont indépendantes.

Partie 1

1) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est diagonalisable.

b) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

d) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

e) Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée en 1b.

f) Montrer que si $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

1. Le problème n'est pas complet, en particulier la partie 3 est tronquée.

g) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

2) Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer par récurrence J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

b) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

c) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

d) i. À l'aide de la question 2b, trouver des endomorphismes p et q tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q \tag{1}$$

ii. Montrer que ce couple (p, q) est unique : $\exists!(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (1).

iii. Montrer que (p, q) forme une famille libre.

e) i. Calculer p^2 et q^2. Quelle est la nature des endomorphismes p et q ? Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

ii. Trouver tous les endomorphismes $h = \alpha p + \beta q$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, qui vérifient $h^2 = f$.

f) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis les matrices de p et de q, dans cette nouvelle base.

g) Déterminer une matrice K de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

h) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Partie 2

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que

$$\lambda \neq \mu \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{array}$$

1) En exprimant f^2, f et id à l'aide de p et q, calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id})$. En déduire que λ et μ sont les seules valeurs propres possibles de f.

2) Exprimer $f - \lambda\,\mathrm{id}$ et $f - \mu\,\mathrm{id}$ à l'aide de p et q.

3) En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$, puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$.

4) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ q$. En déduire, à l'aide 2, que f est diagonalisable. Donner la matrice de p dans une base de vecteurs propres de f (on pourra s'aider de la matrice de f dans cette base).

5) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme, et écrire f^{-1} combinaison linéaire de p et q (on pourra s'aider dans sa recherche des matrices de de la question précédente).

6) Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

7) Soit $F = \mathrm{Vect}\,(p, q)$. Déterminer la dimension de F.

8) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$, c'est-à-dire l'ensemble des h tels que $h = \alpha p + \beta q$ et $h^2 = f$.

9) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une matrice K de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

10) Montrer que, si la multiplicité de la valeur propre λ est supérieure ou égale à 2, alors $\dim \operatorname{Im} p \geqslant 2$, puis, à l'aide de la question précédente et de la question 4, qu'il existe un endomorphisme $p' \in \mathscr{L}(E)$, $p' \notin F$, tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

11) En déduire que, si $\dim E \geqslant 3$, alors $\mathscr{R}(f) \not\subset F$

Partie 3 (incomplète)

Soit $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels deux à deux distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

2) En déduire que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = 0$.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme

$$L_\ell = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_\ell - \lambda_j}$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\operatorname{Im}(p_\ell) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_\ell id)$, puis que les valeurs propres de f sont exactement $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Partie 4

Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre (on pourra effectuer un raisonnement par l'absurde). En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que les $h \in \mathscr{R}(f)$ sont nilpotent. En déduire que, si $\mathscr{R}(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \varepsilon(x)$. À l'aide des pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{P_n^2(X) - X - 1}{X^n}$, en déduire que X^n divise $P_n^2(X) - X - 1$ (c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n^2(X) - X - 1 = X^n Q(X)$).

5) Montrer alors que $\mathscr{R}(f + \mathrm{id}\,) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathscr{R}(\alpha f + \mathrm{id}\,) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathscr{R}(f + \beta\,\mathrm{id}\,) \neq \emptyset$.

FIN DE L'ÉPREUVE