Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 18 novembre 2011

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (PT C, 2008, Partie 1)

1) Soit $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. $f'(x) = -\dfrac{x}{1+x}$ donc

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, f est négative et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\sqrt{n}[$. On a $-\dfrac{t^2}{n} \in]-1,0[\subset]-1,+\infty[$ et $\dfrac{t^2}{n} \in]0,1[\subset]-1,+\infty[$, par conséquent l'inégalité de la question 1) s'écrit

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } t \in]0,\sqrt{n}[,\ \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t^2}{n} \text{ et } \ln\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant \dfrac{t^2}{n}.}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, $\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \dfrac{n^n}{t^{2n}}$, qui est de la forme $\dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha = 2n \geqslant 2 > 1$, donc intégrable.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge.}}$

D'après la question précédente, pour tout $t \in]0,\sqrt{n}[$, on a

$$n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2 \leqslant -n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

Après composition par exp (qui est croissante) puis intégration entre 0 et $\sqrt{n}$ (les fonctions sont continues sur $[0,\sqrt{n}]$: les intégrales existent), il vient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

Finalement, $\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \geqslant 0$ sur $[\sqrt{n},+\infty[$ d'où la dernière inégalité :

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit φ la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $\varphi(u) = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}\,(u)$.

Pour tout $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi'(u) = -\dfrac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)} \neq 0$ **donc φ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme**.

On peut donc effectuer le changement de variable $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}\,u$:

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sin^2 u}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u}$

b) *On cherche une fonction qui envoie $[0, \sqrt{n}]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.* Posons $t = \sqrt{n}\cos u$. $\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin u\,\mathrm{d}u$, puis

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 u)^n(-\sqrt{n}\sin u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u}$

c) *Cette question pouvait se faire en admettant les résultats des questions précédentes.*

D'après 3), $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$

Or d'après 4)a) et 4)b),

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u}$

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^N u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$ par conséquent $\displaystyle\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui signifie

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc l'encadrement obtenu en 4)c) nous permet de conclure : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

De plus, l'intégrale I converge (majoration de e^{-t^2} dans la question 3)), donc $\boxed{\displaystyle I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$, J converge en $-\infty$ et $\boxed{J = 2I = \sqrt{\pi}}$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{2}u$ (qui est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme), il vient $\boxed{K = \sqrt{2}I = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$

Exercice 2 (EPITA, 2006 – extraits)

Partie 1 (Existence des deux intégrales C et S.)

1) **a)** Le changement de variable $u = t^2$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Il vient

$$\boxed{C = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad S = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$$

Si la question avait été de la forme « Montrer que $C = \dots$ et $S = \dots$ », il aurait fallu détailler.

b) *Cette question aurait dû vous rappeler l'exercice 21.2, qui est même cité dans le cours.*

La fonction $f : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 : $f(u) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ qui est intégrable d'après Riemann ($1/2 < 1$), donc f l'est aussi.

Au voisinage de $+\infty$: Soit $X \geqslant 1$. Effectuons une intégration par partie.

$$\int_1^X \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\sin(X)}{2\sqrt{X}} = 0$ et $\left|\dfrac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{4u^{3/2}}$ intégrable d'après Riemann ($3/2 > 1$).

En conclusion, $\lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_1^X \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ existe, donc $\boxed{\text{L'intégrale } C \text{ converge.}}$

Le raisonnement est identique pour S : La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 : $g(u) \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{u}$ donc g est prolongeable en 0 donc intégrable.

Au voisinage de $+\infty$: Soit $X \geqslant 1$. Effectuons une intégration par partie.

$$\int_1^X \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(u)}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Et on conclue de la même façon. $\boxed{\text{L'intégrale } S \text{ converge.}}$

2) Deuxième méthode.

a) $f(x) = \dfrac{e^{ix^2} - 1}{x^2} = \dfrac{1 + ix^2 + o(x^2) - 1}{x^2} = i + o(1)$. *(DL à l'ordre 1 de e^u en 0 avec $u = ix^2$)*

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 par } f(0) = i.}$

b) La fonction f est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Elle est prolongeable en 0 d'après a), donc intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$: $|f(x)| \leqslant \dfrac{|e^{ix^2}| + 1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}$, qui est intégrable d'après Riemann ($2 > 1$), donc f intégrable au voisinage de $+\infty$. *(Attention : jamais d'inégalité dans $\mathbb{C}$. Prendre le module, qui nous ramène dans $\mathbb{R}$. Appliquer l'inégalité triangulaire : ne pas cherche à faire dans la finesse.)*

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge.}}$

c) *Ici, on nous donne la formule, il faut donc détailler un minimum !!* Soit $x > 0$ et $\varepsilon \in]0, x[$.

$$\int_\varepsilon^x \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{ix^2}}{x} - \frac{1 - e^{i\varepsilon^2}}{\varepsilon} + 2i \int_\varepsilon^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\dfrac{1 - e^{i\varepsilon^2}}{\varepsilon} \sim i\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ d'où la formule voulue. Conclusion : $\boxed{\lambda = 2i}$

d) D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\left(\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1-e^{ix^2}}{x}\right)$

Le terme de droite a une limite lorsque $x \to +\infty$ car f est intégrable (d'après la question 2)b)) et $\left|\dfrac{1-e^{ix^2}}{x}\right| \leqslant \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc $\boxed{\text{L'intégrale } E \text{ converge.}}$

Attention ! De nombreux problèmes de rédaction à cette question. Lorsque vous avez une égalité du type $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}_+$, vous n'écrivez pas « donc $f(x) = g(0)$ donc $f(0) = g(0)$ ». Ici, de même, vous mettez des x **partout** *puis, après justification, vous passez à la limite en $+\infty$* **partout**.

De plus, $C = \mathrm{Re}\,(E)$ et $S = \mathrm{Im}\,(E)$, donc, par continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire, $\boxed{C \text{ et } S \text{ convergent.}}$

Partie 2 (Calcul des deux intégrales C et S.)

1) a) *(Question du type « Montrer que », il faut un minimum détailler, et ne pas se contenter de recopier l'énoncé)*

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés :

$$\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| = \frac{\left|e^{-x^2t^2}e^{ix^2}\right|}{|t^2-i|} = \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{(t^2)^2+1^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$$

Car $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $-(xt)^2 \leqslant 0$ (donc $e^{-(xt)^2} \leqslant 1$).

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$, et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Or $\left|\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sim \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable d'après Riemann ($2 > 1$) donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ l'est aussi, puis $\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ par majoration.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x)$ converge absolument donc converge, ce qui signifie que $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

b)
- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ (1)a)) et d'après 1)a)

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

c) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| = \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{(t^2)^2+1^2}} \leqslant e^{-(xt)^2}$$

Car $1 + t^4 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant 1$.

Comme $t^2 e^{-(xt)^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$, à partir d'un certain $\pm t_0$ on a $0 \leqslant e^{-(xt)^2} \leqslant \dfrac{1}{t}^2$, donc $t \mapsto e^{-(xt)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$ il vient $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

L'application $t \mapsto xt$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme car $x \neq 0$. Le changement de variable $u = xt$ ne change pas les bornes ($x > 0$) donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}J = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$$

Comme $\dfrac{\sqrt{\pi}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

De plus F est paire, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

2) **a)** Soit $0 < a < b$, on considère le segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après 1)a)) ;
  la fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(t^2-i)}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = 2be^{-a^2t^2}$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ (1)c)) et

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}, \qquad \left|-2xe^{-x^2(t^2-i)}\right| = 2|x|e^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \varphi(t)$$

Car $|x| = x \leqslant b$, puis $x \mapsto e^{-x^2t^2}$ est décroissante sur $[a,b]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t.}$$

Trouver avant la fonction φ, en essayant de majorer, au brouillon (cf. les techniques de majoration revues en début d'année), puis rédiger comme je l'ai fait. Tout se passe sur $[a,b]$.

Par conséquent F est $\mathscr{C}^1$ sur $\bigcup\limits_{0<a<b} [a,b] = \mathbb{R}_+^*$, puis par parité sur $\mathbb{R}^*$. L'expression de F' est valable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par parité sur $\mathbb{R}^*$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le calcul effectué en 3)c) (valable sur $\mathbb{R}_+^*$),

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t = -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = -2e^{ix^2}\sqrt{\pi}$$

Le résultat reste vrai sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité. Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}}$

$$\forall x > 0 \qquad F(0) - F(x) = -\int_0^x F'(X)\mathrm{d}X = 2\sqrt{\pi}\int_0^x e^{iX^2}\mathrm{d}X$$

c) **i)** La question de la convergence a été réglée au 1)a). La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ donc on pose le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

ii) *Cette question était facile, il suffit d'appliquer le résultat précédent. Mais après 2 ou 3 heures de DST vous voyez moins clairement ce genre de choses, visiblement...*

Par parité, $F(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-i}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2+i}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$. Donc il vient

$$F(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t + 2i\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 2(1+i)\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = (1+i)\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

d) *Même remarque.* D'après 2)d), $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(F(0)-F(x))$, et d'après 1)c), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, donc

$$E = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)$$

Par conséquent, $\boxed{C = \operatorname{Re}(E) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \text{ et } S = \operatorname{Im}(E) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 3 (CCP PSI, 2011 – corrigé UPS)

Partie 1 (étude de séries)

1) a) Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3p} a_k &= \sum_{k=0}^{p-1} a_{3k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} a_{3k+2} + \sum_{k=1}^{p} a_{3k} = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{3k+2} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{3k} - \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{3p}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} = \sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{p+h} = \sum_{h=1}^{2p}\frac{1/p}{1+\frac{h}{p}} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}\end{aligned}$$

b) On fait apparaître une somme de Riemann (d'ordre $2p$) associée à $\varphi : t\mapsto \dfrac{1}{1+2t}$ sur $[0,1]$. Comme la fonction est continue sur le segment, on peut appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = 2\left(\frac{1}{2p}\sum_{h=1}^{2p}\varphi(\frac{h}{2p})\right) \underset{p\to+\infty}{\to} 2\int_0^1 \frac{dt}{1+2t}$$

c'est à dire

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{3p} a_k = \ln(3)}$$

En notant $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, on a montré que $A_{3p}\to\ln(3)$. Comme $A_{3p+1} = A_{3p} + a_{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p+1} + a_{3p+2}$ on a aussi convergence vers $\ln(3)$ des extraites (A_{3n+1}) et (A_{3n+2}). Nos trois extraites sont convergentes de même limite et recouvrent toute la suite des sommes partielles. On a donc convergence de la suite (A_n) (voir exercice 2 de la feuille sur les suites) avec

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln(3)}$$

c) Soit $u_k = \dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$. On a $u_{3p} = \dfrac{1}{3p}$, $u_{3p+1} = -\dfrac{1}{2(3p+1)}$ et $u_{3p+2} = -\dfrac{1}{2(3p+2)}$. Ainsi, $u_p = -\dfrac{a_p}{2}$. La convergence de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(u_n)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\frac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

2) a) $S_n(t)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{it}\neq 1$ et on a donc

$$S_n(t) = \frac{e^{it}-(e^{it})^{n+1}}{1-e^{it}} = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$$

La réaction doit être pavlovienne à la vue de l'expression de S_n.

b) On a, pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{-it}-1}{|e^{it}-1|^2} = \frac{\cos(t)-1}{(\cos(t)-1)^2+\sin(t)^2} - i\frac{\sin(t)}{(\cos(t)-1)^2+\sin(t)^2}$$

$\boxed{\varphi \text{ est donc une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\pi,\alpha]}$ (ses parties réelle et imaginaire le sont).

c) Une intégration par parties donne

$$\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\varphi(t)\right]_\pi^\alpha - \frac{1}{i(n+1)}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi,\alpha]$ et sont donc donc bornée sur ce segment. En notant M_0 et M_1 des majorants sur ce segment de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$, on a alors grossièrement

$$\left|\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2M_0}{n+1} + \frac{(\alpha-\pi)M_1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

d) Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_\pi^\alpha e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}-e^{ik\pi}}{ik} = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - \frac{1}{i}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Le second terme du membre de droite tend vers $i\ln(2)$ (par hypothèse). On a aussi

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \varphi(t)e^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

qui tend vers $-\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n\to+\infty$ (question 2)c)). On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln(2) - i\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

ce qui prouve la convergence de $\sum\left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ et explicite la valeur de la limite.

e) On a, pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$\boxed{e^{it}\varphi(t) = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{e^{it/2}}{2i\sin(t/2)}}$$

f) En passant aux parties réelle et imaginaire dans le résultat de la question 2)d) on en déduit que les séries $\sum\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ et $\sum\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ convergent et que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\alpha)}{k} &= -\ln(2) - \int_\pi^\alpha \mathrm{Re}(ie^{it}\varphi(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\ln(2) - \int_\pi^\alpha \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\ln(2) - [\ln(|\sin(t/2)|)]_\pi^\alpha \\
&= -\ln\left(2\sin(\alpha/2)\right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = -\int_{\pi}^{\alpha} \mathrm{Im}(ie^{it}\varphi(t))\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{\alpha} \frac{dt}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

Le résultat est cohérent avec celui de **1.1.c** puisque $2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$ ($2\pi/3$ n'est pas dans $[\pi, 2\pi[$ mais l'hypothèse importante est seulement $\alpha \neq 0[2\pi]\ldots$).

Partie 2 (Limite d'une intégrale)

1) Soit M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \geqslant 0$. $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Or, $|f(t)g(x,t)| \leqslant M|f(t)|$ et le majorant est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et a fortiori, son intégrale $\boxed{\widetilde{f}_g(x) \text{ existe.}}$ De plus

$$\forall x \geqslant 0,\ |\widetilde{f}_g(x)| \leqslant M \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que $\boxed{\widetilde{f}_g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$

- $\forall t \geqslant 0,\ x \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (g est continue).
- $\forall x \geqslant 0,\ t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (g continue et f continue par morceaux).
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |f(t)g(xt)| \leqslant M|f(t)|$. Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{\widetilde{f}_g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

Il n'y a, dans cette question, pas de raison d'exclure le cas $x = 0$.

2) a) D'après l'existence de l'intégrale de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ On a donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t - \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$ ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A \geqslant 0 /\ \forall a \geqslant A,\ \left| \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

On a a fortiori le résultat demandé (pour $\varepsilon > 0$ donné le A précédent convient).

Dans une question de type « Montrer que », détaillez !

b) Une intégration par parties donne, pour $x > 0$,

$$\int_0^A f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \frac{f(A)e^{ixA} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^A f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

f' est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Une majoration grossière donne alors

$$\left| \int_0^A f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{A\sup_{[0,A]}|f'|}{x}$$

Le majorant étant de limite nulle quand $x \to +\infty$, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. La question **2.1** donne un A. La question **2.2** donne alors un x_0 au delà duquel $\displaystyle\left| \int_0^A f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\forall x \geqslant x_0,\ \left|\widetilde{f}_g(x)\right| \leqslant \left| \int_0^A f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t \right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \leqslant 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc montré que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \widetilde{f}_g(x) = 0}$

3) **a)** On peut procéder par double intégration par partie ou (c'est l'option choisie ici) transiter par l'exponentilelle complexe.

$$\theta(\gamma) = \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi e^{y(\gamma+i)}\ dy\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-e^{\pi\gamma}-1}{\gamma+i}\right) = \frac{1+e^{\pi\gamma}}{1+\gamma^2}$$

b) Le changement de variable $u = tx$ donne

$$\forall a \geqslant 0,\ \int_0^a e^{-t}|\sin(xt)|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{ax} e^{-u/x}|\sin(u)|\ du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, $ax \to +\infty$ car $x > 0$ et les différentes intégrales existent ($g = |\sin|$ est bornée). On obtient,

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du$$

c) Le changement de variable $v = u - k\pi$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du = \int_0^\pi e^{-\frac{v+k\pi}{x}}|\sin(v)|\ dv = e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

d) La série proposée est la série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}}$. Sa raison est dans $]-1,1[$ et la série converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

e) $\widetilde{E}(x)$ est la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{(n+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du$. Par relation de Chasles et avec les questions précédentes, on a donc

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+\pi^2}\frac{1+e^{-\frac{\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Quand $x \to +\infty$, on a $1 - e^{-\frac{\pi}{x}} \sim \dfrac{\pi}{x}$ ce qui permet de lever l'indéterminantion quand on passe à la limite et d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \widetilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$$