Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (PT C, 2008, Partie 1)

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,\sqrt{n}[$,

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ converge puis que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan x}$. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\operatorname{cotan} u$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u$.

c) Déduire des résultats précédents que

$$\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,\mathrm{d}u$$

5) En utilisant le fait que, lorsque N tends vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^N u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$, en déduire la valeur des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (EPITA, 2006 – extraits)

On se propose de prouver l'existence des deux intégrales suivantes (de Fresnel, 1788 - 1827) :

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

puis de les calculer. On utilisera aussi l'intégrale $E = C + iS = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, et on rappelle que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ d'après l'exercice précédent.

Partie 1 (Existence des deux intégrales C et S.)

1) Première méthode : Effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans chacune des intégrales.

a) Donner les nouvelles expression de C et S.

b) Prouver la convergence des deux intégrales C et S.

2) Deuxième méthode.

a) On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{ix^2} - 1}{x^2}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur en 0.

b) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) À l'aide d'une intégration par partie, déterminer le complexe λ tel que

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{ix^2}}{x} + \lambda \int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire l'existence de l'intégrale E, et donc des intégrales C et S.

Partie 2 (Calcul des deux intégrales C et S.)

1) **a)** Établir l'inégalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$: $\left|\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$.

En déduire le domaine de définition de la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

c) Établir l'inégalité et l'égalité suivante pour tout $x > 0$: $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$

En déduire les limites de F en $\pm\infty$.

2) **a)** Soit $0 < a < b$, on considère le segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.
Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ (on citera avec précision le théorème utilisé).
En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

b) Donner l'expression de $F'(x)$ sans intégrale, puis prouver que

$$\forall x > 0 \qquad F(0) - F(x) = 2\sqrt{\pi} \int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

c) Calcul de $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 + i}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t$

i) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1 + t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^4}\,\mathrm{d}u$.

ii) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, en déduire $F(0)$.

d) En déduire les valeurs de C et S.

Exercice 3 (CCP PSI, 2011 – extraits)

On note

$|z|$ le module du nombre complexe z.

J un intervalle de $[0, +\infty[$.

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence, on note $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_J f(t)g(xt)\,dt$ pour $x > 0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\widetilde{f}(x)$ au lieu de $\widetilde{f_g}(x)$.

Partie 1 (étude de séries)

1) Étude de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$. On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{3p}=-\frac{2}{3p}\ ;\ \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=\frac{1}{3p+1}\quad\text{et}\quad a_{3p+2}=\frac{1}{3p+2}$$

a) En constatant que $a_{3p}=\frac{1}{3p}-\frac{1}{p}$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

b) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p\to+\infty$ (on pourra considérer la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable). En déduire la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.

c) En déduire, par un calcul explicite de $\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$, que $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2) Étude des séries $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$. Pour $t\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note

$$\varphi(t)=\frac{1}{e^{it}-1}\qquad\text{et}\qquad S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}$$

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0,2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi\leqslant\alpha<2\pi$.

a) Montrer que $S_n(t)=\varphi(t)(e^{i(n+1)t}-e^{it})$.

b) Montrer que $\varphi\in\mathcal{C}^1([\pi,\alpha])$.

c) Montrer que l'intégrale $\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

d) Expliciter $\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=\ln 2$. Expliciter la limite $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt$.

e) Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t\in[\pi,\alpha]$.

f) En déduire la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Expliciter leurs limites respectives. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en **1.1.c** ?

Partie 2 (Limite d'une intégrale)

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\widetilde{f_g}(x)=\int_0^{+\infty}f(t)g(xt)\,dt$ pour $x>0$.

1) Existence de $\widetilde{f_g}(x)$. On suppose que la fonction g est bornée sur $[0, +\infty[$.
Justifier l'existence de $\widetilde{f_g}(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que la fonction $\widetilde{f_g}$ est continue et bornée sur $]0, +\infty[$.

2) Limite de $\widetilde{f_g}(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\, dt$.

a) Justifier l'affirmation :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un réel positif } A \text{ tel que } \int_A^{+\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \varepsilon$$

b) Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

c) En déduire la limite de $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\, dt$$

3) Étude pour une fonction f particulière. On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geqslant 0$. et donc $\widetilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\, dt$ pour $x > 0$.

a) Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{\gamma y}\sin(y)\, dy$.

b) Montrer que pour $x > 0$,

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$$

c) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

d) Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$. Préciser sa somme.

e) Expliciter $\widetilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\widetilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

FIN DE L'ÉPREUVE