Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 6 octobre 2011

# Épreuve de Mathématiques 2

$\boxed{\text{Correction}}$

---

## Exercice 1 (Petites mines 2010, épreuve commune, premier problème)

### Partie 1

**1)** $x \in \mathscr{D}$ si et seulement si $x \neq 0$ et $x+1>0$ donc $\boxed{\mathscr{D} = ]-1,0[\cup]0,+\infty[}$

**2)** $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$

Par conséquent $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ au voisinage de 0, ce qui implique entre autre que

$\boxed{f \text{ admet en 0 un prolongement par continuité par } f(0)=1.}$

**3)** La fonction $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est donc $\boxed{\text{dérivable en 0 et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x+1}}$.

La fonction $f$ est dérivable sur $D'$ (car dérivable sur $\mathscr{D}$, et en 0 d'après ci-dessus).

De plus $f'(x) = \dfrac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} - 1 + o(1) \sim -\dfrac{1}{2} = f'(0)$, donc $f'$ est continue en 0.

Comme $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $D$ comme composée de fonction $\mathscr{C}^1$, il vient $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D'.}$ *($f'(0)$ existe dès que $f$ est dérivable en 0, ou sinon n'existe pas : on ne peut en aucun cas prolonger $f'$ ! La fonction $f'$ (limite du taux d'accroissement, pente de la tangente, blabla) est entièrement déterminée par $f$, on n'a aucune liberté pour la prolonger par ci ou ça. Ça n'a pas de sens.)*

**4)** $\forall x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{k(x)}{(x+1)x^2}$. Le dénominateur étant positif, il suffit d'étudier le signe du numérateur.

La fonction $k$ est dérivable sur $\mathscr{D}'$ comme composée de fonction $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}'$, et $k'(x) = -\ln(x+1)$.

- $k(0) = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (par croissance comparée).
- $\lim\limits_{-1} f = +\infty$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $k$ | | ↗ | $0$ | ↘ | |
| signe de $k(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $-\frac{1}{2}$ | $-$ | |
| $f$ | | ↘ | | ↘ | |

## Partie 2

**1)** La fonction $f$ est continue (donc continue par morceaux) sur le segment $[0,1]$, donc elle est intégrable sur celui-ci.

**2)** Soit $t \in [0,1]$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique.

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

Donc, en intégrant entre 0 et $x$, pour tout $x \in [0,1]$, il vient

$$\boxed{P_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

**3)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| \leqslant t^n$ donc

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}}$

**4)** Soit $x \in ]0,1]$. $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2}$, donc $Q_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{k} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \frac{P_n(x)}{x}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in ]0,1], \qquad Q_n'(x) = \frac{P_n(x)}{x}}$

**5)** Pour tout $x \in ]0,1]$, $g_n(x) = Q_n'(x) - f(x) = \frac{R_n(x)}{x}$ (d'après 4) et par définition de $f$). La formule reste valable en $x = 1$.
La fonction $g_n$ est continue sur $[0,1]$ car $Q_n'$ (polynôme) et $f$ le sont. En intégrant entre 0 et 1 il vient

$$|\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t| = |Q_n(1) - Q_n(0) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{|R_n(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x$$

Comme $Q_n(0) = 0$ et $\int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$, $\boxed{|Q_n(1) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1) = L}$

**6)** La distance entre $L$ et $Q_N(1)$ est au plus $\frac{1}{(N+1)^2}$. On veut donc $N + 1 = 10^2$ donc $\boxed{N = 99}$

## Partie 3

**1)** La fonction $f$ est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

**2)** Pour $x \in ]0,+\infty[$, $\boxed{f''(x) = \frac{-3x-2}{(1+x)^2x^2} + 2\frac{\ln(1+x)}{x^3}}$

**3)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \exists T_n \in \mathbb{R}[X]\ \exists a_n \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ : est vraie d'après 1.3), avec $T_1 = 1$ et $a_1 = -1$.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $T_n$ le polynôme et $a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

Alors, en dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{T_n'(x)}{(1+x)^n x^n} + T_n(x)\frac{-n(2x+1)}{((1+x)x)^{n+1}} + \frac{a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(1+x)xT_n'(x) - n(2x+1)T_n(x) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \\ &= \frac{T_{n+1}(x)}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} + a_{n+1}\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Avec $T_{n+1} = (1+x)xT_n'(x) - n(2x+1)T_n(x) + a_n(1+x)^n$ et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ : $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \exists T_n \in \mathbb{R}[X]\, \exists a_n \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}}$

**4)** D'après les relations de récurrence trouvées à la question précédente, $a_n = (-1)^n n!$. La dérivation laisse stable $\mathbb{Z}[X]$, et la relation de récurrence ne fait intervenir que des polynômes à coefficients entiers. Comme $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau, $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ entraîne $T_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$. Or $T_1 = 1$, donc par récurrence

$$\boxed{\text{Tous les coefficients de } T_n \text{ sont des entiers.}}$$

**5)** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(1+x) \times \frac{1}{x} = g(x)h(x)$ avec $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.
La formule de Leibnitz s'écrit

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}h^{(n-k)} \qquad \text{avec} \qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad g^{(p+1)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(1+x)^{p+1}} \quad \text{et} \quad h^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{x^{p+1}}$$

En remplaçant, il vient $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}$.

En multipliant la somme par $(1+x)^n x^n$, on trouve finalement $\boxed{T_n(x) = (-1)^{n-1}n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(1+x)^{n-k}x^{k-1}}$

Pour $n = 2$, $T_2(x) = -2\left((1+x) + \frac{1}{2}x\right) = -3x - 2$, cohérent avec le résultat du 2).

# Exercice 2 (Petites mines 2006, épreuve commune)

## Partie 1 (Généralités sur $f_n$.)

**1)** Le dénominateur ne s'annule jamais ($\cos x \in [-1, 1]$) donc $\boxed{D = \mathbb{R}}$

**2)** Cas $n = 0$ : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f_0(-x) = \frac{-\sin x}{2 - \cos x} = -f_0(x)$ donc $\boxed{f_0 \text{ est impaire}}$

Cas $n \in \mathbb{N}^*$ : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f_n(-x) = \frac{-\sin x}{2 - \cos x} - \frac{-x}{n} = -f_n(x)$ donc $\boxed{f_n \text{ est impaire.}}$

**3)** Cas $n = 0$ : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 - \cos(x + 2\pi)} = f_0(x)$ donc $\boxed{f_0 \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

Cas $n \in \mathbb{N}^*$ : $f_n(0) = 0$ et $f_n(0+2\pi) = \frac{\sin(2\pi)}{2 - \cos(2\pi)} - \frac{2\pi}{n} = -\frac{2\pi}{n} \neq 0$ donc $\boxed{f_n \text{ n'est pas } 2\pi\text{-périodique.}}$

*La négation de $\forall x\ P(x)$ est $\exists x\ \text{non}P(x)$, et souvent le plus simple pour montrer un « $\exists x$ » est de construire concrètement un $x$ qui convient.*

**4)** Pour $n=0$ la fonction est périodique donc la courbe s'obtient par translation selon l'axe des $x$, après avoir utilisé la parité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{2-\cos(x+2\pi)} - \dfrac{x+2\pi}{n} = f_n(x) - \dfrac{2\pi}{n}$ donc la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ s'obtient par $\boxed{\text{translation de vecteur } 2\pi\overrightarrow{\imath} - \dfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{\jmath}.}$

Il suffit d'étudier $f_n$ sur $[0,\pi]$ pour tracer sa courbe sur $\mathbb{R}$ tout entier : la parité de $f_n$ nous permet d'obtenir $\mathscr{C}_{f_n}$ sur $[-\pi, pi]$, puis on obtient $\mathscr{C}_{f_n}$ sur $\mathbb{R}$ par la translation précédente.

## Partie 2 (Étude de la fonction $f_0$.)

**1)** La fonction $f_0$ est dérivable car composée de fonctions dérivables.

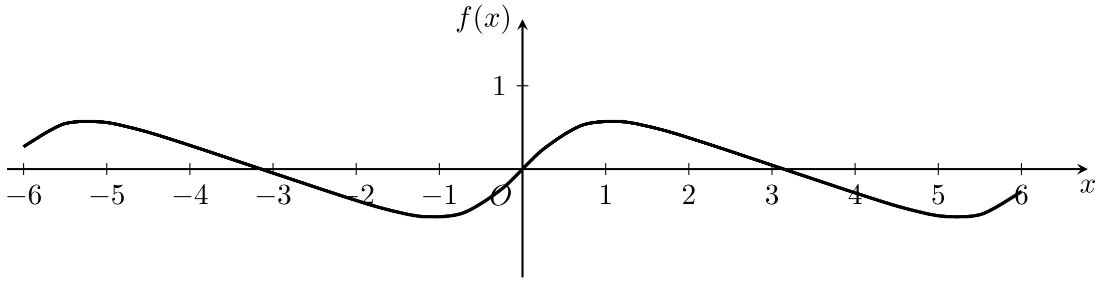
$$\boxed{f_0'(x) = \frac{(\cos x)(2-\cos x) - \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}}$$

**2)** Le dénominateur est strictement positif, et $2\cos x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{3}$ (sur $[0,\pi]$) d'où le tableau.

$f_0(0) = 0$ ; $f_0(\frac{\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ; $f_0(\pi) = 0$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_0'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_0$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow$ | $0$ |

**3)** Courbe :




**4)** La fonction $f_0$ est périodique donc, si ce sup existe, $\sup\limits_{\mathbb{R}} f_0 = \sup\limits_{[-\pi,\pi]} f_0$. D'après le tableau de variation de la question 3 (écrit en 2), et sachant que la fonction est impaire, on trouve

$$\boxed{\sup_{\mathbb{R}} f_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\inf_{\mathbb{R}} f_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Ainsi, $\boxed{\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_0| = \max\left(\sup\limits_{\mathbb{R}} f_0, -\inf\limits_{\mathbb{R}} f_0\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

## Partie 3 (Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}$)

**1)** $\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^*}$

**2)** En 0, $g(x) \sim \dfrac{x}{x(2-1)} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0}$

**3)** $$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}{x(2-\cos x)} = \frac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{2-\cos x} = \frac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\ &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(-\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o\left((\frac{x^2}{2})^2\right)\right) \\ &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) \\ &= \boxed{1-\frac{2}{3}x^2+o(x^3)} \end{aligned}$$

*La fonction $g$ est paire, donc son DL ne contient que des termes pairs.*

**4)** La fonction $g$ admet un DL à l'ordre 3 en 0, donc a fortiori à l'ordre 1, d'où $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$ et $\boxed{g'(0)=0}$ d'après le DL.

**5)** La fonction $g$ est continue (car dérivable) sur $]0,\pi]$, et prolongée par continuité en 0, donc continue sur $[0,\pi]$. De plus, elle est strictement décroissante ($g'<0$) sur $]0,\pi]$, continue en 0, donc strictement décroissante sur $[0,\pi]$.
Finalament, le théorème de la bijection s'écrit : $g$ est une bijection entre $[0,\pi]$ et $g([0,\pi])=[g(\pi),g(0)]=[0,1]$.

### Partie 4 (Étude d'une suite qui annule $f_n$.)

**1)** L'équation $f_n(a)=0$ s'écrit $f_0(a)=\dfrac{a}{n}$. Or d'après 2.4, $f_n(a)\in\left[-\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{\sqrt3}{3}\right]$. Donc $a\leqslant n\dfrac{\sqrt3}{3}\leqslant n\sqrt3$.

Comme $a$ est un réel strictement positif, $\boxed{a \text{ appartient à l'intervalle } [0,n\sqrt3].}$

**2)** Soit $x_n\in]0,\pi]$. Alors

$$f_n(x_n)=0\iff f_0(x_n)=\frac{x_n}{n}\iff g(x_n)=\frac{1}{n}\iff x_n=g^{-1}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Car $g$ est bijective de $]0,\pi]$ sur $[0,1[$ d'après 3.5).

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un unique réel } x_n \text{ appartenant à } ]0,\pi] \text{ tel que } f_n(x_n)=0.\ x_n=g^{-1}\Big(\frac{1}{n}\Big).}$

**3)** D'après 2), $x_n=g^{-1}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Or $g^{-1}=h:[0,1]\to[0,\pi]$ est continue comme réciproque d'une fonction continue.
De plus, $\Big(\dfrac{1}{n}\Big)_n$ est une suite convergente de $[0,1]$, de limite $0\in[0,1]$. Donc par continuité de $h$,

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty}x_n=h\Big(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big)=h(0)=\pi.}$$

## Exercice 3 (ATS 2007)

**1)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_k'$ est dérivable car Arctan l'est et $\boxed{f_k'(x)=\dfrac{1}{1+(x+k\pi)^2}}$.

De plus, $x>0\Longrightarrow x+k\pi>k\pi>0\Longrightarrow 0<f_k'(x)=\dfrac{1}{1+(x+k\pi)^2}<\dfrac{1}{1+(k\pi)^2}<1$

Donc $\boxed{\forall x>0,\ 0<f_k'(x)\leqslant\delta_k<1}$ où $\boxed{\delta_k=\dfrac{1}{1+(k\pi)^2}}$.

**2)** La fonction $g_k$ est dérivable et $g_k'=f_k'-1$. Or $f_k'<1$ avec égalité pour $x=-k\pi$ seulement.
Donc $g_k'<0$ sauf en un point, et finalement $\boxed{g_k \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$
La fonction $g_k$ est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus $g_k(0)=\text{Arctan}\,(k\pi)>0$ (car $k\pi>0$ et Arctan est strictement croissante) et $g_k(\dfrac{\pi}{2})=\text{Arctan}\,(\dfrac{\pi}{2}+k\pi)-\dfrac{\pi}{2}<0$ (car Arctan $<\pi/2$).
Donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\theta_k\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g_k(\theta_k)=0$.

Or $g_k(x)=0\iff f_k(x)=x$. Ainsi, $\boxed{\text{Il existe un unique réel } \theta_k\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[ \text{ tel que } \theta_k=f_k(\theta_k).}$

**3)** $u_n = f_k(u_{n-1})$.

**a)** $u_0 = 0$ donc par construction de $\theta_k$ (d'après 2.), $0 < \theta_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f_k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($f'_k > 0$ d'après 1.), donc $f_k^n$ aussi (composée $n$ fois) et

$$u_n = f_k^n(0) \leqslant f_k^n(\theta_k) = \theta_k$$

De plus, d'après 1), pour tout $x \in [u_{n-1}, \theta_k]$, $0 \leqslant f'_k(x) \leqslant \delta_k$. En intégrant sur cet intervalle, il vient

$$0 \leqslant f_k(\theta_k) - f_k(u_{n-1}) \leqslant \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$$

*(Que l'on utilise le TAF ou qu'on intègre l'encadrement, dans tous les cas il faut commencer par vérifier l'ordre des bornes de l'intervalle. Sinon on ne maîtrise pas le sens des inégalités.)*

Or $f_k(\theta_k) = \theta_k$ et $f_k(u_{n-1}) = u_n$. Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \delta_k(\theta_k - u_{n-1})}$.

**b)** Par récurrence on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \delta_k^n(\theta_k - u_0)$. Or $0 < \delta_k < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_k^n = 0$, et par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \theta_k) = 0$ : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \theta_k}$

**c)** D'après ci-dessus, $0 \leqslant \theta_1 - u_n \leqslant \delta_1^n(\theta_1 - u_0)$, avec $u_0 = 0$, $\delta_1 = \dfrac{1}{1+\pi^2}$ et $\theta_1 \in ]0, \pi/2[$.
Donc il suffit que $n$ vérifie $\dfrac{1}{(1+\pi^2)^n}\dfrac{\pi}{2} \leqslant 10^{-15}$. C'est-à-dire $n \geqslant \dfrac{\log(\frac{\pi}{2}10^{15})}{\log(1+\pi^2)} \geqslant \dfrac{16}{1} = 16$
Conclusion : $\boxed{n = 1 \text{ convient.}}$

**4)** $\theta_k = f_k(\theta_k) = \operatorname{Arctan}(\theta_k + k\pi)$. Or $v_k = \theta_k + k\pi \in ]k\pi, \pi/2 + k\pi[$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(\theta_k) = \dfrac{\pi}{2}$, et $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \theta_k = \dfrac{\pi}{2}}$

**5)** D'après le calcul de $f'_k$ en 1), $f_k$ est strictement croissante. De plus $0 \leqslant \theta_k \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Donc

$$\operatorname{Arctan}(k\pi) = f_k(0) \leqslant f_k(\theta_k) = \theta_k \leqslant f_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

Or pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi, finalement,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) \leqslant \tau_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k\pi}\right)}$$

$\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) \sim \dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} \sim \dfrac{1}{k\pi} \sim \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)$ donc en divisant l'encadrement précédent par $\dfrac{1}{k\pi}$,

$$k\pi \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) \leqslant k\pi\tau_k \leqslant k\pi \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k\pi}\right)$$

Les deux extrémités de l'encadrement tendent vers 1 en $+\infty$ par définition des équivalent précédent. Donc, par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} k\pi\tau_k = 1$.

En conclusion, $\boxed{\tau_k \sim \dfrac{1}{k\pi}}$

*Attention ! Équivalents et petits o d'une part, et inégalités d'autre part, ne font pas bon ménage. Toujours repasser par une limite lorsqu'on a un encadrement de ce type, en divisant par l'équivalent visé.*