Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (Petites mines 2010, épreuve commune, premier problème)

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Partie 1

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f.

3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D'.

4) Étudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

Partie 2

Dans cette partie, on s'intéressera à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On notera L la valeur de cette intégrale, mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} \qquad \text{et} \qquad Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n^2}$$

1) Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
On pourra commencer par calculer $1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Dans toute la suite, on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3) Établir la majoration $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

4) Comparer, pour tout $x \in]0,1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.

5) En notant g_n la fonction définie pour $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et par $g_n(0) = 0$, montrer

$$|Q_n(1) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

6) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approxime L à 10^{-4} près.

Partie 3

On s'intéresse aux dérivées successives de f, que l'on note $f^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

2) Calculer $f''(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

4) Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.

5) En utilisant la formule de Leibnitz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n. On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de ce polynôme. Vérifier cette expression pour $n = 2$.

Exercice 2 (Petites mines 2006, épreuve commune)

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} - \dfrac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

Partie 1 (Généralités sur f_n.)

Soit n un entier naturel fixé.

1) Déterminer le domaine de définition D de f_n.

2) f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.

3) f_n est-elle 2π-périodique ?

4) Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

Partie 2 (Étude de la fonction f_0.)

1) Étudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.

2) Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.

3) Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
On rappelle que : $\sqrt{3}$ pour valeur 1,732 comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.

4) Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Partie 3 (Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x(2 - \cos x)}$)

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Montrer que g admet une limite finie ℓ en 0.
On prolonge g par continuité en posant : $g(0) = \ell$.

3) Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 3 de g ainsi prolongée.

4) Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.
On admet que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et que pour tout x de $]0, \pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.

5) Montrer que g est une bijection entre $[0, \pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Partie 4 (Étude d'une suite qui annule f_n.)

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n , alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.

2) Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $]0, \pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (ATS 2007)

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonction f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_k(x) = \operatorname{Arctan}(x + k\pi) \qquad \text{et} \qquad g_k(x) = f_k(x) - x$$

1) Calculer $f_k'(x)$ et montrer que $\forall x > 0,\ 0 < f_k'(x) \leqslant \delta_k < 1$ où δ_k est une constante à déterminer en fonction de k.

2) Étudier les variations de g_k sur $\mathbb{R}$ et en déduire l'existence d'un unique réel $\theta_k \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\theta_k = f_k(\theta_k)$.

3) On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f_k(u_{n-1})$.

  a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$.

  b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \theta_k$.

  c) Pour $k = 1$, déterminer n tel que $0 \leqslant \theta_1 - u_n \leqslant 10^{-15}$.

4) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \theta_k = \dfrac{\pi}{2}$.

5) On pose $\tau_k = \dfrac{\pi}{2} - \theta_k$. Montrer que l'on a $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}\right) \leqslant \tau_k \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)$.

En déduire un équivalent simple de τ_k lorsque k tend vers $+\infty$.

FIN DE L'ÉPREUVE