Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 9 septembre 2011

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (ESC Chambéry 2009, option E)

1) **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$ donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b) La fonction h est **continue**, **strictement** monotone sur $]-\infty, 1[$, de limites aux bornes de cet intervalle de signes opposées, donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α. De même sur $]1, +\infty[$, (donc $\beta > 1$).

De plus $h(0) = 1 > 0$ donc $\boxed{\alpha \in [0, 1[}$.

2) **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x^3$, donc

x	0		1
$g'(x)$	0	$+$	
g	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $u_1 = g(0) = \dfrac{1}{4}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant 1$: $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  La fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$ donc en particulier sur $[0, 1]$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \Longrightarrow g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1)$$

  Ce qui s'écrit $\dfrac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$

c) La suite (u_n) est croissante majorée, donc convergente. Notons ℓ sa limite.

La fonction g est continue, donc par passage à la limite, $u_{n+1} = g(u_n)$ s'écrit $\ell = g(\ell)$. Or $g(x) = x$ équivaut à $h(x) = 0$.

Ainsi, d'après 1)b), $\ell = \alpha$ ou β. 0r $\ell \in [0, 1]$ puisque $u_n \in [0, 1]$ pour tout n : ce n'est pas β.

Finalement, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha.}$

Exercice 2 (ATS 2010, exercice 1)

Il s'agit d'intégrales de Wallis, un classique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)^{2k}\,\mathrm{d}t$ et $J_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)^{2k}(\cos t)^2\,\mathrm{d}t$.

1) $I_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}t = 1$ et $I_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left(\pi - \left[\dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi\right) = \dfrac{1}{2}$.

2) Pour tout $k > 0$,

$$\begin{aligned} I_{k-1} - I_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{2k-2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{2k-2}(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{2k-2}(\cos t)^2\,\mathrm{d}t = J_{k-1} \end{aligned}$$

3) Pour tout $k > 0$

$$\begin{aligned} J_{k-1} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin t)^{2k-2}(\cos t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\sin t)^{2k-1}}{2k-1}\cos t\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\sin t)^{2k-1}}{2k-1}(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{2k-1} I_k \end{aligned}$$

D'après 2) $I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$, et on vient de montrer que $J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1} I_k$, donc $\boxed{I_k = \dfrac{2k-1}{2k} I_{k-1}}$.

4) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$

est vraie pour tout $k > 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $I_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2!}{4(1!)^2}$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. La relation (R) trouvée à la question 3) nous donne :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{2k+1}{2k+2} I_{k-1} && (R) \\ &= \frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} && (\mathcal{H}_k) \\ &= \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)(2k+2)}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} = \frac{(2(k+1))!}{4(k+1)^2 4^k (k!)^2} = \frac{(2(k+1))!}{4^{k+1}((k+1)!)^2} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k > 0 \qquad I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}}$

5) **a)** Soit $n > 0$. La relation (R) obtenue à la question 3) s'écrit, après passage au logarithme,

$$u_n = u_{n-1} + \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) = u_{n-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

b) $h'(x) = \dfrac{-x}{1+x} > 0$ sur $]-1, 0[$, donc h strictement croissante, or $h(0) = 0$, donc $\boxed{h < 0 \text{ sur }]-1,0[.}$

c) Pour tout $k > 0$, $-\dfrac{1}{2k} \in]-1, 0[$ donc d'après la question précédente, $h\big(-\dfrac{1}{2k}\big) < 0$. Par suite,

$$\boxed{\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < -\frac{1}{2k}}$$

d) • Pour tout $n > 0$, $v_n - w_n = \ln(n+1) - \ln n > 0$, donc $w_n < v_n$.
De plus, $v_n - w_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Décroissance de (v_n) : en utilisant $n = n + 1 - 1$, il vient

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = h\left(-\frac{1}{n+1}\right) < 0$$

• Croissance de (w_n) : comme $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$ (courbe sous la tangente),

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

• Conclusion : les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes, et convergentes de même limite.
On vient de prouver le résultat ***important*** *suivant :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. *En particulier la limite de cette somme est* $+\infty$.

e) D'après 5)c), en sommant les inégalités, il vient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = v_n + \ln n$ et tend donc vers $+\infty$. Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$
En passant à l' exponentielle, on trouve $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

Exercice 3 (TPC 2007, exercice)

Partie 1

1) a) *Remarque préliminaire : j est une racine 3-ième de l'unité, c'est-à-dire une solution de $X^3 = 1$ ($\boxed{j^3 = 1}$). Cette équation s'écrit aussi $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = 0$. Puisque $j \neq 1$, j est forcément racine de $X^2 + X + 1$ (pour que le produit soit nul) : $\boxed{j^2 + j + 1 = 0}$*. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- $\underline{k = 3p}$: $j^k = (j^3)^p = 1$ donc $S(3p) = 3$.
- $\underline{k = 3p+1}$: $S(3p+1) = 1 + (j^3)^p j + (j^3)^{2p} j^2 = 1 + j + j^2 = 0$.
- $\underline{k = 3p+2}$: $S(3p+2) = 1 + (j^3)^p j^2 + (j^3)^{2p} j^4 = 1 + j^2 + j^3 j = 1 + j^2 + j = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad S(3p) = 3 \text{ et } S(3p+1) = S(3p+2) = 0}$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k j^k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k (j^2)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 + j^k + (j^2)^k\right) X^k$$

On pose $N = E(n/3)$, la partie entière de $n/3$ (donc $n = 3N$, $n = 3N+1$ ou $n = 3N+2$). D'après le résultat de la question 1)a), $\boxed{P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \sum_{k=0}^{n} a_k S(k) X^k = \sum_{p=0}^{N} 3a_{3p} X^{3p}}$.

2) a) $R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k) = X^3 - k(1+j+j^2)X^2 + k^2(1+j+j^2)X - k^3 = X^3 - k^3$
(Sans calculs : les racines de $R_k(X)$ sont k, jk et j^2k, c'est-à-dire exactement les solutions de $X^3 = k^3$, donc $R_k(X) = \alpha(X^3 - k^3)$.)

b) $T = R_1R_2R_3R_4$, où R_k est le polynôme de la question précédente. Comme R_k est un polynôme en X^3, $\boxed{T \text{ est un polynôme en } X^3}$.
Surtout, éviter de développer le polynôme T de degré 12...

c) $T = R_1R_2R_3R_4$ donc $T(X) = (X^3-1)(X^3-2^3)(X^3-3^3)(X^3-4^3)$.
Ainsi, avec $\boxed{H(Y) = (Y-1)(Y-2^3)(Y-3^3)(Y-4^3)}$, $H(X^3) = T(X)$.
Les racines de H sont 1, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $4^3 = 8^2 = 64$.

d) Méthode directe :

$$\begin{aligned} T(X)=0 &\iff Q(X)=0 \quad \text{ou} \quad Q(jX)=0 \quad \text{ou} \quad Q(j^2X)=0 \\ &\iff X=1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad jX=1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad j^2X=1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{j}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}=\overline{j}=j^2$, et $\dfrac{1}{j^2}=j$, donc en divisant par j et par j^2 les équations ci-dessus, on trouve que les racines de T sont

$$\boxed{\{1,2,3,4,j^2,2j^2,3j^2,4j^2,j,2j,3j,4j\}}$$

Seconde méthode : D'après 2)c), $T(X)=H(X^3)$, donc

$$T(X)=0 \iff H(X^3)=0 \iff X^3=1,2^3,3^3 \text{ ou } 4^3$$

En résolvant chacune des équations $X^3=a$ ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\{1,j,j^2,2,2j,2j^2,3,3j,3j^2,4,4j,4j^2\}}$$

Partie 2

1) $K^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, puis $K^3=I$.*Désormais, il n'y aura (presque) plus de calcul matriciel explicite à faire :*

$$A=(jK-I)(j^2K-I)=j^3K^2-jK-j^2K+I=K^2-(j+j^2)K+I=K^2+K+I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

et pour B le calcul est identique à celui de $R_k(X)$ (K et I commutent) :

$$B=(K-I)(K-jI)(K-j^2I)=K^3-(1+j+j^2)K^2+(1+j^2+j)K-j^3I=K^3-I=0$$

2) a)
- $P_1=P(K)=\dfrac{1}{3}A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,
- $P_2=P(j^2K)=\dfrac{1}{3}(I+j^2K+jK^2)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j^2&1&j\\j&j^2&1\end{pmatrix}$,
- $P_3=P(jK)\dfrac{1}{3}(I+jK+j^2K^2)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&j^2&j\\j&1&j^2\\j^2&j&1\end{pmatrix}$.

b)
- $P_1P_2=\dfrac{1}{9}(I+K+K^2)(I+j^2K+jK^2)=\dfrac{1}{9}(1+j+j^2)(I+K+K^2)=0$
- $P_1P_3=\dfrac{1}{9}(1+j+j^2)(I+K+K^2)=0$
- $P_2P_3=\dfrac{1}{9}(I+j^2K+jK^2)(I+jK+j^2K^2)=\cdots=\dfrac{1}{9}(1+j+j^2)(I+K+K^2)=0$
- $P_1^2=\dfrac{1}{9}(I+K+K^2)^2=\dfrac{1}{9}(I^2+K^2+K^4+2K+2K^2+2K^3)=\dfrac{1}{9}(3I+3K^2+3K)=P_1$,
- De même pour $P_2^2=P_2$ et $P_3^2=P_3$.

Donc les P_n sont des projecteurs.

3) a) $F\subset\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. La matrice nulle appartient à F, donc $F\neq\emptyset$.
Soit $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')\in F$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a :

$$\lambda M(a,b,c)+M(a',b',c')=\begin{pmatrix}\lambda a+a'&\lambda c+c'&\lambda b+b'\\\lambda b+b'&\lambda a+a'&\lambda c+c'\\\lambda c+c'&\lambda b+b'&\lambda a+a'\end{pmatrix}=M(\lambda a+a',\lambda b+b',\lambda c+c')\in F$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Il était plus rapide et plus efficace de remarquer que $F=\mathrm{Vect}\,(I,K,K^2)$.

b) On remarque que $F = \mathrm{Vect}\,(I, K, K^2)$, puis que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$,

$$aI + bK + cK^2 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$$

Donc la famille (I, K, K^2) est libre et génératrice de F, c'est une base de F. Ainsi $\dim F = 3$.

4) **a)** La famille est génératrice par définition, il reste à montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$.

Deux méthodes : calculs directs, on tombe sur un système de 9 équations, avec seulement 3 équations distinctes : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + j^2 b + jc = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$.

La matrice de ce système est de déterminant (à calculer...) non nul, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Autre méthode : $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_1(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3) = 0 \\ P_2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3) = 0 \\ P_3(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3) = 0 \end{cases}$

En développant et utilisant les résultats de 2)b), la première équation nous donne

$$P_1(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3) = \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_1 P_2 + \lambda_3 P_1 P_3 = \lambda_1 P_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$

et de même pour les suivantes (les P_n commutent car ce sont des polynômes en K), $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

Donc $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } F'.}$

b) Soit $(M, N) \in F'^2$, de coordonnées respectives (a, b, c) et (a', b', c') dans la base (P_1, P_2, P_3).

$$MN = (aP_1 + bP_2 + cP_3)(a'P_1 + b'P_2 + c'P_3) = aa'P_1^2 + ab'P_1P_2 + ac'P_1P_3 + ba'P_2P_1 + bb'P_2^2 + bc'P_2P_3 + \dots$$

Donc c'est une combinaison linéaire de $P_n P_m$, dont on a montré (2b) qu'ils étaient soit nuls, soit des P_n, très exactement $P_n P_m = \delta_{n,m} P_n$. Ainsi

$$MN = aa'P_1 + bb'P_2 + cc'P_3$$

Conclusion : $\boxed{F' \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$

c) On sait que $\dim F = 3$, et puisque (P_1, P_2, P_3) est une base de F', $\dim F' = 3$ aussi.

De plus $P_1 = M(1, 1, 1) \in F$, $P_2 = M(1, j^2, j) \in F$ et $P_3 = M(1, j, j^2) \in F$. Donc $F' \subset F$.

Donc par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{F = F'}$.

d) Soit une matrice $M(a, b, c) \in F$, de coordonnées (α, β, γ) dans la base (P_1, P_2, P_3) :

$$M(a, b, c) = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$$

Donc $P_1 M(a, b, c) = \alpha P_1$. En calculant le premier coefficient du produit, on trouve : $a + b + c = \alpha$.

De même, $P_2 M(a, b, c) = \beta P_2$ donc $a + jb + j^2 c = \beta$, puis $a + jb + j^2 c = \gamma$.

Finalement, $\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (a + b + c, a + jb + j^2 c, a + j^2 b + jc)}$.

5) Soit $M(a, b, c)$ de coordonnées (α, β, γ) dans la base (P_1, P_2, P_3). D'après le calcul effectué en 4)b),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M(a, b, c))^n = \alpha^n P_1 + \beta^n P_2 + \gamma^n P_3}$$

6) **a)** D'après 4)c), $\boxed{M(a, jb, j^2 c) \text{ a pour coordonnées } (a + jb + j^2 c, a + j^2 b + cj, a + b + c) = (\beta, \gamma, \alpha)}$ et $\boxed{M(a, j^2 b, jc) \text{ a pour coordonnées } (\gamma, \alpha, \beta)}$. Déterminer en fonction de (α, β, γ)

b) En décomposant les M dans la base (P_1, P_2, P_3) puis en utilisant 4)b), il vient

$$\begin{aligned} D(a,b,c) &= M(a,b,c)M(a,jb,j^2c)M(a,j^2b,jc) \\ &= (\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3)(\beta P_1 + \gamma P_2 + \alpha P_3)(\gamma P_1 + \alpha P_2 + \beta P_3) \\ &= \alpha\beta\gamma P_1 + \beta\gamma\alpha P_2 + \gamma\alpha\beta P_3 = \boxed{\alpha\beta\gamma(P_1 + P_2 + P_3)} \end{aligned}$$

De plus, d'après le résultat obtenue à la Partie 1, 1)b), et vue la définition des P_n, $P_1+P_2+P_3 = I$, donc $D(a,b,c) = \alpha\beta\gamma I$.

7) *C'est l'occasion de vérifier ses calculs : l'énoncé donne en fait l'expression de α, β et γ trouvée au 4)d).*
D'après 4)d), U a pour coordonnées $(j, j^2, 1)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) Ainsi, d'après 5),

$$U^k = j^k P_1 + (j^2)^k + P_2 + 1^k P_3$$

En particulier $U^3 = P_1 + P_2 + P_3 = I$, donc $\boxed{\mathscr{G}(U) = \{I, U, U^2\}}$. *On peut même remarquer que $\mathscr{G}(U)$ est un groupe (sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$) isomorphe au groupe $\mu_3 = \{1, j, j^2\}$ des racines troisièmes de l'unité.*

Exercice 4 (Petites mines, 2009, MPSI, extrait)

Partie 1 (Étude d'une fonction)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(1-2x^2)e^{x^2}$, donc

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	↘	$f(-\sqrt{2}/2)$	↗	$f(\sqrt{2}/2)$	↘	-1

L'exponentielle l'emporte sur le polynôme x, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\exp(-x^2) = 0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. On calcule de même la limite de f en $-\infty$. De plus $f(\sqrt{2}/2) = \dfrac{3}{\sqrt{2e}} - 1$ et $f(-\sqrt{2}/2) = -\dfrac{3}{\sqrt{2e}} - 1$.
Ainsi $\mathscr{C}_f$ admet la droite $x = -1$ pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, en étant respectivement au-dessus et en dessous de celle-ci.

2) $f''(x) = 3(-4x - 2x(1-x^2))e^{-x^2}$. Ainsi, $f''(0) = 0$, le point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}_f$ est un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$.

3) L'équation de la tangente en 0 est $\boxed{y = 3x - 1}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 3x + 1 = 3x(e^{-x^2} - 1)$. Or $e^{-x^2} \leqslant 1$ donc la parenthèse est toujours négative : la différence est du signe de $-x$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente pour les $x < 0$ et en dessous de la tangente pour les $x > 0$. On retrouve que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

4) Ploum.

5) **a)** La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ car composée de fonction $\mathscr{C}^\infty$, donc admet des développements limités à n'importe quel ordre, en particulier en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$ donc en utilisant le DL usuel de exponentielle :

$$f(x) = 3x\left(1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + o(x^4)\right) - 1 = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$$

Partie 2

1) $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$ car $e < 3$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{x^2}$$

Les limites se calculent comme dans la partie 1.
Par hypothèse, $n \geqslant 2$ donc $\sqrt{n/2} \geqslant 1$ puis $f_n(\sqrt{n/2}) \geqslant f_n(1) > 0$.

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\nearrow$	$f(\sqrt{n/2}) > 0$	$\searrow$	-1

La fonction f_n est donc continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) > 0$ (d'après 1)). La stricte monotonie et le théorème des valeurs intermédiaires nous permettent de conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n < 1$. De même, f_n continue strictement décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$, donc $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $v_n > \sqrt{n/2} > 1$.

3) D'après 2), $v_n > \sqrt{n/2}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n/2} = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

4) **a)** Par définition de u_n, $f_n(u_n) = 3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0$, donc $\boxed{\exp(-u_n^2) = \dfrac{1}{3u_n^n}}$.

b) $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$, car $u_n < 1$.

c) D'après 2), u_n et u_{n+1} soit dans $[0, 1]$. De plus la fonction f_{n+1} est croissante sur $[0, 1]$, donc appliquer f_{n+1} ne change pas l'ordre entre u_n et u_{n+1}.
Si $u_{n+1} < u_n$, alors $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(u_n) < 0$ (d'après b)), ce qui est absurde. Donc forcément $u_n < u_{n+1}$.
Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

d) La suite (u_n) est croissante (c) majorée par 1 (b), donc convergente.

5) **a)** Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} g_n(x) = 0 &\iff \ln 3 + n\ln x - x^2 = 0 \iff \exp(\ln 3 + n\ln x - x^2) = \exp(0) \\ &\iff 3x^n \exp(-x^2) = 1 \iff f_n(x) = 0 \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $g_n(u_n) = 0$, donc $\ln 3 - u_n^2 = n\ln u_n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 3 - u_n^2 = \ln 3 - \ell^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln(ell) \neq 0$. Donc le membre de gauche de l'égalité précédente a une limite finie alors que celui de droite a une limite infinie, ce qui est absurde.
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

c) $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ d'après la question précédente. Donc il vient

$$0 = \ln 3 + n\ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 = \ln 3 + n(w_n + o(w_n)) - 1 - 2w_n = \ln 3 - 1 + nw_n + o(nw_n)$$

Car $w_n = o(nw_n)$: $w_n/(nw_n) = 1/n \to 0$. Ainsi $(1 - \ln 3)/n = w_n + o(w_n)$, et finalement,

$$\boxed{w_n \sim \frac{1 - \ln 3}{n}}$$