Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (ESC Chambéry 2009, option E)

1) **a)** Étudier les variations et limites aux bornes de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 - 4x + 1$.

b) En déduire que l'équation $x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite). Montrer que $\alpha \in [0, 1[$ et $\beta > 1$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{4}(x^4 + 1)$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier les variations et limites aux bornes de la fonction g.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

c) Montrer que (u_n) converge vers α.

Exercice 2 (ATS 2010, exercice 1)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)^{2k}\, dt$ et $J_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)^{2k}(\cos t)^2\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour tout $k > 0$, $I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.

3) Avec une intégration par partie, montrer que pour tout $k > 0$ $J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1} I_k$.

En déduire la relation de récurrence

$$(R) \qquad I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}$$

4) Démontrer par récurrence que pour tout $k > 0$, $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

5) Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \ln I_n$.

a) Montrer que, pour tout $n > 0$, $u_n = u_{n-1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$.

b) Étudier $h(x) = \ln(1 + x) - x$ sur $]-1, 0]$, donner son signe.

c) En déduire que, pour tout $k > 0$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right) < -\dfrac{1}{2k}$.

d) Montrer que les suites $v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $w_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$ sont adjacentes. On notera γ la limite, sans chercher à la calculer.

e) En déduire la limite de (u_n), en remarquant que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$, puis celle de I_n.

Exercice 3 (TPC 2007, exercice)

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Partie 1

1) a) Calculer pour $k = 3p$, $k = 3p+1$ et $k = 3p+2$, où $p \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme

$$S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficient complexes, de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, on exprimera le résultat en fonction des coefficients a_k de P.
Indication : *On pourra éventuellement distinguer les différents cas : $n = 3N$, $n = 3N+1$ et $n = 3N+2$.*

2) a) Soit $k \in \mathbb{C}$. Développer et simplifier le polynôme

$$R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k)$$

b) Soit le polynôme $Q(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Montrer que T est un polynôme en X^3.

c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $H(Y) = T(X)$. Déterminer les racines du polynôme $H(Y)$.

d) Déterminer de deux façons différentes les racines du polynôme T.

Partie 2

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre 3.

On note I la matrice identité et on considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $K^3 = I$. Calculer $A = (jK - I)(j^2K - I)$ et $B = (K-I)(K-jI)(K-j^2I)$.

2) Pour une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, on définit $P(M) = \dfrac{1}{3}(I + M + M^2)$

a) Calculer $P_1 = P(K)$, $P_2 = P(j^2K)$ et $P_3 = P(jK)$.

b) Calculer P_1P_2, P_1P_3 et P_2P_3. Vérifier que $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ et $P_3^2 = P_3$.

3) Soit $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Déterminer une base et la dimension de F.

4) Soit $F' = \operatorname{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F'.

b) Montrer que F' est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que $\forall (M,N) \in F'^2,\ MN \in F'$.

c) Montrer que $F = F'$.

d) Soit une matrice $M(a,b,c) \in F$, déterminer ses coordonnées (α, β, γ) dans la base (P_1, P_2, P_3).

5) Soit $M(a,b,c)$ de coordonnées (α,β,γ) dans la base (P_1,P_2,P_3), déterminées à la question précédente. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M(a,b,c))^n = u_nP_1 + v_nP_2 + w_nP_3$$
Avec (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites complexes dont on déterminera les expressions pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de α, β et γ.

6) Soit $D(a,b,c) = M(a,b,c)M(a,jb,j^2c)M(a,j^2b,jc)$.
On continue de noter (α,β,γ) les coordonnées de $M(a,b,c)$ dans la base (P_1,P_2,P_3).

- **a)** Déterminer en fonction de (α,β,γ) les coordonnées respectives de $M(a,jb,j^2c)$ et de $M(a,j^2b,jc)$.
- **b)** En déduire la décomposition de $D(a,b,c)$ dans la base (P_1,P_2,P_3) sans recourir à un produit matriciel explicite.

7) Soit $U = M(a,b,c)$ telle que $\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & j \\ a+jb+j^2c & = & j^2 \\ a+j^2b+jc & = & 1 \end{array}\right.$

Montrer que $\mathscr{G}(U) = \{U^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini, que l'on déterminera.

Exercice 4 (Petites mines, 2009, MPSI, extrait)

On rappelle que $e = \exp(1) \simeq 2{,}72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0{,}61$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ et $\ln(3) \simeq 1{,}10$.

Partie 1 (Étude d'une fonction)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x\exp(-x^2) - 1$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variation de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

2) Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}_f$?

3) Donner l'équation de la tangente en 0. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage du point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5)
- **a)** Justifier que f admet des développements limités en 0 à n'importe quel ordre.
- **b)** Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Partie 2

On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 2. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 3x^n\exp(-x^2) - 1$.

1) Quel est le signe de $f_n(0)$, $f_n(1)$?

2) Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Donner la limite de f_n au voisinage de $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

3) Quelle est la limite de (v_n) ?

4) Étude de (u_n).
- **a)** Calculer $\exp(-u_n^2)$ en fonction de u_n^n.
- **b)** En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
- **c)** Déduire de ce qui précède la monotonie de (u_n).
- **d)** Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

5) Soit g_n définie sur $]0,+\infty[$ par $\forall x > 0$, $g_n(x) = \ln 3 + n\ln x - x^2$.
- **a)** Soit $x > 0$, montrer que $g_n(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.
- **b)** On suppose que $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclure.
- **c)** Soit (w_n) la suite définie par $\forall n \geqslant 2$ $w_n = u_n - 1$.
  Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

FIN DE L'ÉPREUVE