Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (ESC Chambéry, ECT)

Mon considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3$$

1) **a)** $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

b) Pour tout entier $k \geqslant 3$, $B^k = B^3 B^{k-3} = 0B^{k-3} = 0$.

2) $A = 3I_3 + B$. Or I_3 et B **commutent**, donc on peut écrire la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \qquad (B^k = 0 \text{ si } k \geqslant 3) \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $A^0 = I_3$, la formule est vraie ; et si $n = 1$, on retrouve aussi la bonne formule, puisque le terme en $n(n-1)$ s'annule.

3) **a)** On trouve la relation de récurrence suivante : $X_{n+1} = AX_n$. La récurrence est laissée en exercice au lecteur (mais il faut la faire ! puisqu'elle est demandée).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) X_0 \\ \text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= 3^n \left(X_0 + \frac{n}{3} BX_0 + \frac{n(n-1)}{18} B^2 X_0 \right) = 3^n \begin{pmatrix} 2 + 2n/3 \\ 1 + 2n/3 + n(n-1)/9 \\ -2n/3 - n(n-1)/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $u_n = 3^n(2 + 2n/3)$ et a pour limite $+\infty$; $v_n = 3^n(1 + 2n/3 + n(n-1)/9)$ et a pour limite $+\infty$; $w_n = 3^n(-2n/3 - n(n-1)/9)$ et a pour limite $-\infty$.

Exercice 2 (Petites mines, 2008, épreuve commune, second problème)

Partie A : Études de deux fonctions

1) **a)** La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc les fonctions F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos(0) = 1$, donc F est prolongeable en 0 par $F(0) = 1$.
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = -\sin(0) = 0$, donc G est prolongeable en 0 par $G(0) = 0$.

2) **a)** Les fonctions F et G sont des produits de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elles sont donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$F'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \qquad \text{et} \qquad G'(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

b) $F(x) - F(0) = \dfrac{x - x^3/3! + \mathrm{o}(x^3)}{x} - 1 = -\dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)$ pour tout $x > 0$.
Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$ existe et vaut $0 = F'(0)$.
$G(x) - G(0) = \dfrac{1 - (1 - x^3/2! + \mathrm{o}(x^2)}{x} = \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$ pour tout $x > 0$.
Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{G(x) - G(0)}{x}$ existe et vaut $\dfrac{1}{2} = G'(0)$.

3) **a)** Soit $x > 0$. $F(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{N}^*$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k\pi$. C'est une suite strictement croissante.

b) De même, soit $x > 0$. $G(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi\ k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = 2k\pi = a_{2k}$, c'est une sous suite de (a_k).

4) **a)** F est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ (q. 2)a)), et $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

b) Pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x)$, et $x^2 > 0$. Donc F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $F'(x) = 0$ si et seulement si $h(x) = 0$.

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -x\sin x$, qui est non nul et de signe constant sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, donc h est strictement monotone sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d) La fonction h est continue strictement monotone sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc injective sur chacun de ces intervalles : si h s'annule sur ces intervalles, elle ne s'y annule qu'une seule fois. De plus (q. 4)b)) x_k est un zéro F' si et seulement s'il est un zéro de h. Ainsi il y a unicité des x_k.

e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $h(k\pi + \pi/2) = (-1)^{k+1}$ qui ne sont pas de même signe. Or h est continue donc elle s'annule sur l'intervalle $]a_k, a_k + \pi/2[$. Ainsi l'unique zéro de h $x_k \in]a_k, a_k + \pi/2[$.

f) $x_k \geqslant a_k = k\pi$ donc $\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} k\pi = +\infty$. De plus, d'après q. 4)e), $x_k \in]k\pi, k\pi + \pi/2[$, donc il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \pi \leqslant \frac{x_k}{k} \leqslant \pi + \frac{\pi}{2k}$$

Par conséquence, $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{x_k}{k} = \pi$, ce qui signifie $x_k \sim_{+\infty} k\pi$.

5)

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \to f(t)\sin(xt)$ sont continues comme produit de fonctions continues, donc intégrables sur le segment $[0, 1]$.

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_f(-x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = I_f(x)$ donc I_f est paire.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $J_f(-x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(-\sin(xt))\,\mathrm{d}t = -J_f(x)$, donc J_f est impaire.

8) **a)** Soit $x > 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)(\cos(xt) + i\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

On fait une intégration par partie, f étant $\mathscr{C}^1$:

$$\int_0^1 f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)e^{ixt}}{ix}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)e^{ix}-f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

b) Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Les fonctions f et f' sont continues (puisque f est $\mathscr{C}^1$) donc bornées sur $[0,1]$.

c) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}|I_f(x)+iJ_f(x)| &\leqslant \left|\frac{f(1)e^{ix}-f(0)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(1)e^{ix}|+|f(0)|}{|ix|} + \frac{1}{|ix|}\int_0^1 |f'(t)||e^{ixt}|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2M}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 M'\,\mathrm{d}t = \frac{2M+M'}{x}\end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2M+M'}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}|I_f(x)+iJ_f(x)|=0$, et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}(I_f(x)+iJ_f(x))=0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x)=\Re(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x)=0$ par linéarité et continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire.

e) Par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} I_f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} J_f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x)=0$.

9) **a)** Cours.

b) Soit $u\in\mathbb{R}^*$ fixé. On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0,|u|]$:

$$|\sin(u)-\sin(0)| \leqslant (\sup_{[0,|u|]}|\cos|)|u| = |u|$$

c) Soient x et y deux réels. En majorant $\left|\sin\left(\dfrac{xt+yt}{2}\right)\right|$ par 1, il vient

$$\begin{aligned}|I_f(x)-I_f(y)| &= \left|\int_0^1 f(t)(\cos(xt)-\cos(yt))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\left|-2\sin\left(\frac{xt+yt}{2}\right)\sin\left(\frac{xt-yt}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|\,|xt-yt|\,\mathrm{d}t \leqslant |x-y|\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d) La fonction I_f est $\displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc continue.

10) La fonction f constante égale à 1 convient.

Exercice 3 (Petites mines, 2007, épreuve commune, second problème)

La correction de la question 18.c. est fausse, ne pas lire.

A. Étude d'un mouvement dans l'espace

$\boxed{1}$ Pour tout réel t
$$a(t)+c(t)=\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}-\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}=0$$

Donc
$$\boxed{\text{Le point } \mathrm{N}(t) \text{ appartient au plan P.}}$$

$\boxed{2}$ Un point $\mathrm{M}(x,y,z)$ appartient à la droite D si et seulement si le point (x,y,z) vérifie à la fois l'équation de P et l'équation de Q. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x,y,z)\in \mathrm{P}\cap\mathrm{Q} &\iff \begin{cases} x+z=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} y=3\\ z=-x\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La droite D admet donc comme représentation paramétrique}\\ \Big\{(x,3,-x) \qquad x\in\mathbb{R}\Big\}\end{array}}$$

> Une autre manière de calculer une équation paramétrique d'une droite en dimension 3 consiste à chercher un vecteur directeur de la droite. Lorsque la droite est définie comme une intersection de plans, il suffit de calculer un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}_{\mathrm{P}}$ normal au plan P et un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}_{\mathrm{Q}}$ normal au plan Q. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{N}}_{\mathrm{P}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{N}}_{\mathrm{Q}}$ est un vecteur directeur de D. Enfin on détermine un point A de D, et une équation paramétrique de D est
> $$\mathrm{A}+t\,\overrightarrow{u}$$
> On rappelle que le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet (a,b,c) pour vecteur normal.

Si un point $\mathrm{N}(t)\in\mathrm{D}$, alors $y=3$, donc il existe un réel t tel que $\sin(t)=3$. Ceci est impossible car la fonction sinus est à valeurs dans $[\,-1\,;1\,]$, si bien que

$$\boxed{\text{aucun point } \mathrm{N}(t) \text{ n'appartient à la droite D.}}$$

$\boxed{3}$ Calculons la quantité demandée par l'énoncé, qui correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ON}}(t)$.

$$\begin{aligned}a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)&=\frac{\cos^2(t)}{2}+\sin^2(t)+\frac{\cos^2(t)}{2}\\ &=\cos^2(t)+\sin^2(t)\\ a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)&=1\end{aligned}$$

Il vient alors que le point $\mathrm{N}(t)$ est sur la sphère de centre O et de rayon 1. Comme le point $\mathrm{N}(t)$ est également dans le plan vectoriel P,

$$\boxed{\text{le point } \mathrm{N}(t) \text{ est sur le cercle de P, de centre O et de rayon 1.}}$$

$\boxed{4}$ On choisit deux points distincts A et B de la droite D. Alors la distance de la droite D au point $\mathrm{N}(t)$ est donnée par

$$d(\mathrm{N}(t), \mathrm{D}) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}(t)}\|}{\mathrm{AB}}$$

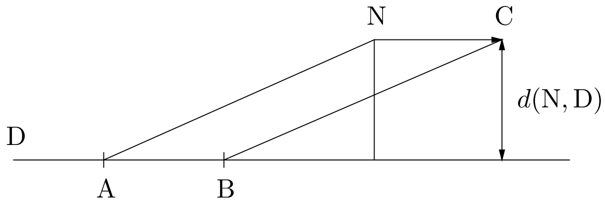
Afin de déterminer deux points de la droite D, on utilise l'équation paramétrique de D trouvée à la question 2. Pour A, on choisit $x = 0$, et pour B, $x = 1$, soit $\mathrm{A}(0, 3, 0)$ et $\mathrm{B}(-1, 3, 1)$. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-1, 0, 1)$, donc $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$. En outre

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}(t)} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \sin t - 3, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)$$

d'où
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}(t)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ \sin t - 3 \\ -\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \sin t \\ 0 \\ 3 - \sin t \end{pmatrix}$$

Finalement
$$\boxed{d(\mathrm{N}(t), \mathrm{D}) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}(t)}\|}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{2(3 - \sin t)^2}}{\sqrt{2}} = |3 - \sin t|}$$

Rappel : Distance d'un point à une droite en dimension 3



On rappelle la démonstration de la formule que l'on a utilisée : on se place dans le plan engendré par la droite D et le point N. Étant donnés deux points distincts A et B de la droite D, on note C l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Alors le quadrilatère ABCN est un parallélogramme. On calcule son aire de deux manières

- d'une part, on sait que son aire est égale à $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}}\|$
- d'autre part, la distance du point N à la droite D est une hauteur de ce parallélogramme, associée à la base [AB], donc son aire est égale à $d \times \mathrm{AB}$.

On en déduit que $d \times \mathrm{AB} = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}}\|$

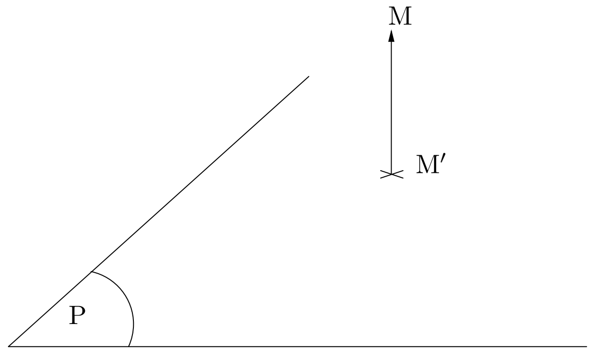
soit
$$d = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AN}}\|}{\mathrm{AB}}$$

La distance du point $\mathrm{N}(t)$ au plan Q est égale à

$$d(\mathrm{N}(t), \mathrm{Q}) = \frac{\left| \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} + \sin t - \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$

soit
$$\boxed{d(\mathrm{N}(t),\mathrm{Q}) = \frac{|3-\sin t|}{\sqrt{3}}}$$

Rappel : Distance d'un point à un plan



Étant donné un point $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace et un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$
$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
En effet, si on note $\mathrm{M}'(x_1, y_1, z_1)$ le projeté orthogonal de M sur P, et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à P alors
$$\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right| = \|\overrightarrow{n}\| \times \mathrm{MM}'$$
donc, si on choisit $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, alors
$$|a(x_1-x_0) + b(y_1-y_0) + c(z_1-z_0)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,d(\mathrm{M},\mathrm{P})$$
En outre, $\mathrm{M}' \in \mathrm{P}$, donc $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$, d'où
$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\boxed{5}$ Pour tout réel t, nous avons
$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t+\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}\left(1 + \mathrm{e}^{\,\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = 0$$
car il s'agit de la somme des racines troisièmes de l'unité. Donc
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t+\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 0}$$

$\boxed{6}$ En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité précédente, on obtient
$$\cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$
$$\sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

d'où
$$a(t) + a\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + a\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$
$$b(t) + b\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + b\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$
$$c(t) + c\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + c\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

On en déduit que O est l'isobarycentre des points $\mathrm{N}(t)$, $\mathrm{N}\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\mathrm{N}\left(t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

B. Construction d'un polynôme

7 On a
$$\boxed{s(t) = \sin t}$$

8 On a
$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{\sin t \cos^2 t}{2} \\ &= -\frac{\sin(2t)\cos t}{4} \\ p(t) &= -\frac{2\sin(2t)\cos t}{8} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$, on obtient
$$\boxed{p(t) = -\frac{\sin(3t) + \sin t}{8}}$$

9 En utilisant les expressions respectives de a, b, c, il vient
$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{2}} - \frac{\cos^2 t}{2} - \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\cos^2 t}{2} \\ d(t) &= -\frac{\cos(2t) + 1}{4} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a l'égalité remarquable
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Donc, d'après la question 3
$$d(t) = \frac{(a(t) + b(t) + c(t))^2 - \big(a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2\big)}{2} = \frac{\sin^2 t - 1}{2} = -\frac{\cos^2 t}{2}$$

On a ainsi obtenu de deux manières différentes
$$\boxed{d(t) = -\frac{\cos(2t) + 1}{4} = -\frac{\cos^2 t}{2}}$$

10.a Si $t=\pi/2$, alors $a(t)=c(t)=0$. Le réel 0 est donc racine double de R, si bien que

$$\boxed{\mathrm{R}(0)=\mathrm{R}'(0)=0}$$

10.b Les fonctions s,d et p sont les fonctions symétriques du polynôme R, donc

$$\boxed{\mathrm{R}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3-s(t)\mathrm{X}^2+d(t)\mathrm{X}-p(t)}$$

En utilisant les expressions trouvées aux questions 7, 8 et 9, il vient

$$\boxed{\mathrm{R}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3-(\sin t)\mathrm{X}^2-\frac{1+\cos(2t)}{4}\,\mathrm{X}+\frac{\sin t+\sin(3t)}{8}}$$

C. Endomorphismes à noyau imposé

11 L'application $\varphi\,:\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x+z\in\mathbb{R}$ est une forme linéaire, non nulle car $\varphi(1,0,1)=2$. L'ensemble P est le noyau de cette forme linéaire non nulle

$$\boxed{\text{P est donc un plan vectoriel.}}$$

12 L'ensemble Q n'est pas un plan vectoriel, car il ne contient pas le vecteur nul. En revanche, il s'agit de l'image réciproque de 3 par la forme linéaire $\varphi\,:\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x+y+z\in\mathbb{R}$, si bien que

$$\boxed{\text{l'ensemble Q est un plan affine.}}$$

13 Tout d'abord, les vecteurs $\overrightarrow{i'}$ et $\overrightarrow{j'}$ sont bien dans le plan P. De plus

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{i'}\| &= \frac{\|(1,0,-1)\|}{\sqrt{2}}=1\\ \|\overrightarrow{j'}\| &= \|(0,1,0)\|=1\\ \overrightarrow{i'}\cdot\overrightarrow{j'} &= \frac{(1,0,-1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{2}}=0\end{aligned}$$

on en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})\text{ est une base orthonormale de P.}}$

D'après l'équation du plan P, $(1,0,1)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\overrightarrow{k'}$ est colinéaire à ce vecteur, il est donc aussi normal au plan P. De plus, ce vecteur est normé. Résumons : on a deux espaces en somme directe orthogonale, P et $\mathbb{R}\overrightarrow{k'}$, et une base orthonormale pour chacun de ces sous-espaces vectoriels. En concaténant ces bases, on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, ainsi

$$\boxed{(\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'})\text{ est une base orthonormale de }\mathbb{R}^3.}$$

14 D'après la question précédente, $(\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'})$ est une base de l'espace. Pour tout vecteur $\overrightarrow{e}$, il existe donc trois réels λ_i,λ_j et λ_k tels que

$$\overrightarrow{e} = \lambda_i \overrightarrow{i'} + \lambda_j \overrightarrow{j'} + \lambda_k \overrightarrow{k'}$$

Dans cette égalité, on multiplie scalairement chaque membre par $\overrightarrow{i'}$, pour obtenir

$$\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i'} = \lambda_i \overrightarrow{i'} \cdot \overrightarrow{i'} + \lambda_j \overrightarrow{j'} \cdot \overrightarrow{i'} + \lambda_k \overrightarrow{k'} \cdot \overrightarrow{i'} = \lambda_i$$

car la base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ est une base orthonormée. Ainsi, $\lambda_i = \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i'}$. On montre de même que $\lambda_j = \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{j'}$ et $\lambda_k = \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}$. Finalement

$$\boxed{\overrightarrow{e} = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i'})\overrightarrow{i'} + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{j'})\overrightarrow{j'} + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})\overrightarrow{k'}}$$

15.a En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
u\left(\overrightarrow{e}\right) &= u\left((\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i'})\overrightarrow{i'} + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{j'})\overrightarrow{j'} + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})\overrightarrow{k'}\right) \\
&= (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i'})u\left(\overrightarrow{i'}\right) + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{j'})u\left(\overrightarrow{j'}\right) + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})u\left(\overrightarrow{k'}\right) \\
&= (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})u\left(\overrightarrow{k'}\right) && \text{car } \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'} \in \operatorname{Ker}(u) \\
u\left(\overrightarrow{e}\right) &= (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})\overrightarrow{z} && \text{en posant } \overrightarrow{z} = u\left(\overrightarrow{k'}\right)
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{il existe } \overrightarrow{z} \in \mathrm{E} \text{ tel que pour tout } \overrightarrow{e} \in \mathrm{E},\ u\left(\overrightarrow{e}\right) = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'})\overrightarrow{z}.}$$

15.b Montrons d'abord que pour un vecteur $\overrightarrow{z}$ donné, $u : \overrightarrow{e} \mapsto \left(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z}$ est linéaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'} \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}
u(\overrightarrow{e}) &= \left(\left(\lambda \overrightarrow{e} + \overrightarrow{e'}\right) \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z} \\
&= \left(\lambda \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z} + \left(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z} \\
u(\overrightarrow{e}) &= \lambda\left(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z} + \left(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité du produit scalaire. Montrons à présent que $\mathrm{P} \subset \operatorname{Ker}(u)$. Comme $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ est une base orthonormée,

$$\overrightarrow{i'} \cdot \overrightarrow{k'} = \overrightarrow{j'} \cdot \overrightarrow{k'} = 0$$

Ceci prouve qu'une base de P est incluse dans $\operatorname{Ker}(u)$. On en déduit que $\mathrm{P} \subset \operatorname{Ker}(u)$, ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une application donnée par } \overrightarrow{e} \mapsto \left(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k'}\right)\overrightarrow{z} \text{ est} \\ \text{un endomorphisme de E tel que } \mathrm{P} \subset \operatorname{Ker}(u).\end{array}}$$

> Prenez bien garde à tous les termes de la question : on ne peut pas ici se contenter de vérifier que P est inclus dans le noyau de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Il est indispensable de montrer en premier lieu que l'application proposée est linéaire.

15.c Comme $\mathrm{P} \subset \mathrm{Ker}\,(u)$, ces deux espaces vectoriels sont égaux, si et seulement si ils ont la même dimension. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{E} = 3 = \dim \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{rg}\,(u)$$

donc comme $\dim \mathrm{P} = 2$, on a $\mathrm{P} = \mathrm{Ker}\,(u)$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(u) = 1$. Or d'après la question 15.a, l'image de u est dirigée par $\overrightarrow{z}$. Il vient alors

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{Ker}\,(u) \text{ si et seulement si } \overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}.}$$

D. Matrices de projecteur

16 Les colonnes de la matrice de M' dans la base B' sont les images des vecteurs de B' dans la base B'. Comme $\overrightarrow{i'} \in \mathrm{P}$, on a $p\left(\overrightarrow{i'}\right) = \overrightarrow{i'}$. De même, $p\left(\overrightarrow{j'}\right) = \overrightarrow{j'}$. Comme $\overrightarrow{k'}$ est un vecteur normal à P, $p\left(\overrightarrow{k'}\right) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{M}' \text{ est la matrice de } p \text{ dans la base } \mathrm{B}'.}$$

17 La matrice de passage de B à B' est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B' exprimés dans la base B. Donc d'après la définition de la base B' de la question 13,

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

La matrice de passage de B' à B est l'inverse de la matrice de passage de B à B'. Comme les deux bases, B et B' sont orthonormales, $\mathrm{P}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'}$ est une matrice orthogonale. Par suite, son inverse est égale à sa transposée, d'où

$$\boxed{\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}'\to\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

18.a La matrice M étant la matrice d'une projection

$$\boxed{\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}}$$

18.b Raisonnons par récurrence. Notons

$$\mathscr{P}(n) \ : \ (\mathrm{M} + \mathrm{I})^n = \mathrm{I} + (2^n - 1)\mathrm{M}$$

et montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ Par convention, $(\mathrm{M}+\mathrm{I})^0 = \mathrm{I}$, d'une part. D'autre part

$$\mathrm{I} + (2^0 - 1)\mathrm{M} = \mathrm{I}$$

et on en déduit que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$ On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors

$$(\mathrm{M}+\mathrm{I})^n = \mathrm{I} + (2^n - 1)\mathrm{M}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}+\mathrm{I})^{n+1} &= (\mathrm{M}+\mathrm{I}) \times (\mathrm{M}+\mathrm{I})^n \\
&= (\mathrm{M}+\mathrm{I})\,(\mathrm{I} + (2^n - 1)\mathrm{M}) \\
&= \mathrm{M} + (2^n-1)\mathrm{M}^2 + \mathrm{I} + (2^n-1)\mathrm{M} \\
&= \mathrm{M} + (2^n-1)\mathrm{M} + \mathrm{I} + (2^n-1)\mathrm{M} \qquad \text{car } \mathrm{M}^2 = \mathrm{M} \\
(\mathrm{M}+\mathrm{I})^{n+1} &= \mathrm{I} + (2^{n+1} - 1)\mathrm{M}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad (\mathrm{M}+\mathrm{I})^n = \mathrm{I} + (2^n - 1)\mathrm{M}}$$

Deuxième méthode
Il existe une méthode constructive ne nécessitant pas de récurrence, mais faisant appel au concept de *polynôme de matrice*, qui n'est pas au programme de première année. On effectue la division euclidienne du polynôme $(\mathrm{X}+1)^n$ par le polynôme $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ (le choix de ce polynôme est dicté par le fait que $\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} = 0$) :

$$(\mathrm{X}+1)^n = \mathrm{Q}_n(\mathrm{X})(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}) + \mathrm{R}_n(\mathrm{X}) \qquad (\mathbf{1})$$

avec $\deg \mathrm{R}_n \leqslant 1$. D'après le degré de R_n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $\mathrm{R}_n(\mathrm{X}) = \alpha_n \mathrm{X} + \beta_n$. En évaluant $(\mathbf{1})$ en $\mathrm{X} = 0$, puis en $\mathrm{X} = 1$, on obtient $\beta_n = 1$ et $\alpha_n = 2^n - 1$. On remplace X par M dans $(\mathbf{1})$, pour trouver

$$(\mathrm{M}+\mathrm{I})^n = \mathrm{I} + (2^n - 1)\mathrm{M}$$

car $\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} = 0$.
Troisième méthode
Comme les matrices M et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton

$$(\mathrm{M}+\mathrm{I})^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{M}^k$$

comme $\mathrm{M}^k = \mathrm{M}$ pour $k \geqslant 1$, il vient

$$(\mathrm{M}+\mathrm{I})^n = \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{M}$$

Enfin, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\right) - 1 = 2^n - 1$

d'où le résultat demandé.

> On a vu qu'il y a ici plusieurs méthodes, plus ou moins astucieuses, et plus ou moins longues. Remarquons quand même que la plupart des questions contenant l'expression « Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ » peuvent se traiter par récurrence.

18.c On sait que $\qquad \mathrm{M} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'}^{-1}\mathrm{M}'\mathrm{P}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}'\mathrm{P}$

On effectue donc les calculs

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis
$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

19.a Pour montrer que $\mathscr{M}$ est un espace vectoriel, on va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Tout d'abord, $\mathscr{M}$ est non vide, car il contient l'élément neutre : $0_3 = \mathrm{M}_{0,0}$. De plus, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{M}_{a,b}, \mathrm{M}_{a',b'}$ deux éléments de $\mathscr{M}$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda\mathrm{M}_{a,b} + \mu\mathrm{M}_{a',b'} &= \lambda\,(a\mathrm{M} + b\mathrm{I}) + \mu\,(a'\mathrm{M} + b'\mathrm{I}) \\ &= \lambda a\mathrm{M} + \lambda b\mathrm{I} + \mu a'\mathrm{M} + \mu b'\mathrm{I} \\ &= (\lambda a + \mu a')\mathrm{M} + (\lambda b + \mu b')\mathrm{I} \\ \lambda\mathrm{M}_{a,b} + \mu\mathrm{M}_{a',b'} &= \mathrm{M}_{\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b'} \end{aligned}$$

Donc $\qquad \boxed{\mathscr{M} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

D'après sa définition $\mathscr{M}$ est engendré par I et M. L'espace vectoriel $\mathscr{M}$ est donc de dimension inférieure à 2. Montrons que cette famille est libre. Soient λ, μ tels que

$$\lambda\mathrm{I} + \mu\mathrm{M} = 0_3$$

Supposons que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Alors ni λ, ni μ n'est nul, car dans ce cas, soit M, soit I serait nul. On en déduit que I et M sont proportionnels. Mais ceci est impossible, car ces deux matrices sont de rangs différents. On en déduit que (I, M) est une famille libre de $\mathscr{M}$. Comme cette famille est libre, et génératrice, c'est une base. Ainsi

$$\boxed{\mathscr{M} \text{ est de dimension 2, et admet pour base } (\mathrm{I}, \mathrm{M}).}$$

19.b On a
$$\begin{aligned} a\mathrm{M} + b\mathrm{I} &= a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}'\mathrm{P} + b\mathrm{I} \\ &= a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}'\mathrm{P} + b\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} \\ a\mathrm{M} + b\mathrm{I} &= \mathrm{P}^{-1}\,(a\mathrm{M}' + b\mathrm{I})\,\mathrm{P} \end{aligned}$$

par ailleurs
$$\det(a\mathrm{M}' + b\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (a+b)^2 b$$

Les matrices $a\mathrm{M}' + b\mathrm{I}$ et $a\mathrm{M} + b\mathrm{I}$ étant semblables, il vient

$$\boxed{\det(a\mathrm{M} + b\mathrm{I}) = (a+b)^2\, b}$$

Comme une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, il vient

$$\boxed{a\mathrm{M} + b\mathrm{I} \text{ est inversible, si et seulement si } b \neq 0 \text{ et } a \neq -b.}$$

19.c Calculons le produit $\mathrm{M}_{a,b} \times \mathrm{M}_{c,d}$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{a,b} \times \mathrm{M}_{c,d} &= (a\mathrm{M} + b\mathrm{I})(c\mathrm{M} + d\mathrm{I}) \\ &= ac\mathrm{M}^2 + ad\mathrm{M} + bc\mathrm{M} + bd\mathrm{I} \\ &= ac\mathrm{M} + ad\mathrm{M} + bc\mathrm{M} + bd\mathrm{I} \qquad \text{car } \mathrm{M}^2 = \mathrm{M} \\ \mathrm{M}_{a,b} \times \mathrm{M}_{c,d} &= (ac + ad + bc)\mathrm{M} + bd\mathrm{I} \end{aligned}$$

Ainsi, le produit $\mathrm{M}_{a,b} \times \mathrm{M}_{c,d}$ est bien de la forme $\mathrm{M}_{e,f}$, avec

$$\boxed{\begin{array}{l} e = ac + ad + bc \\ f = bd \end{array}}$$

19.d Si $\mathrm{M}_{a,b}$ est inversible, alors $b \neq 0$ et $a \neq -b$, d'après la question 19.a.

- Analyse supposons que $\mathrm{M}_{a,b}$ admette un inverse dans $\mathscr{M}$: il existe alors c, d tels que $\mathrm{M}_{a,b} \times \mathrm{M}_{c,d} = \mathrm{I}$. D'après la question précédente, on obtient

$$\begin{cases} 0 = ac + ad + bc \\ 1 = bd \end{cases}$$

Comme $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$, il vient

$$\begin{cases} d = \dfrac{1}{b} \\ c(a+b) + \dfrac{a}{b} = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} d = \dfrac{1}{b} \\ c = -\dfrac{a}{b(a+b)} \end{cases}$$

- Synthèse pour $\mathrm{M}_{a,b} \in \mathscr{M}$, inversible, on a $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$ et

$$\mathrm{M}_{a,b} \times \left(-\frac{a}{b(a+b)}\,\mathrm{M} + \frac{1}{b}\,\mathrm{I}\right) = \mathrm{I}$$

et
$$\left(-\frac{a}{b(a+b)}\,\mathrm{M} + \frac{1}{b}\,\mathrm{I}\right) \times \mathrm{M}_{a,b} = \mathrm{I}$$

Finalement
$$\boxed{\text{si } \mathrm{M}_{a,b} \text{ est inversible, alors } \mathrm{M}_{a,b}^{-1} = \left(-\frac{a}{b(a+b)}\,\mathrm{M} + \frac{1}{b}\,\mathrm{I}\right)}$$