Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les parties I, II, et III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

1. On suppose, dans cette question, que : $b^2 - 4\,c > 0$.
   (a) Donner les racines r_1 et r_2 du trinôme $r^2 + b\,r + c$, et rappeler les relations coefficients-racines (qui permettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et $r_1\,r_2$).
   (b) Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_i\,t}$, $i \in \{1,2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Vérifier que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:
   $$\left(y' - r_1\,y\right)' - r_2\,\left(y' - r_1\,y\right) = 0$$
   (d) Montrer qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:
   $$y'(t) - r_1\,y(t) = C_2\,e^{r_2\,t} \quad , \quad y'(t) - r_2\,y(t) = C_1\,e^{r_1\,t} \quad \forall\,t \in \mathbb{R}$$
   (e) En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est de la forme :
   $$t \mapsto \lambda\,e^{r_1\,t} + \mu\,e^{r_2\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
   (f) *Etude d'un cas particulier :* $b = 0$, $c = -16$.
      i. Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ dans ce cas particulier.
      ii. On adjoint à l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ les conditions initiales :
      $$y(0) = 2\,e \quad , \quad y'(0) = 0$$
      Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$? On demande d'expliciter ces solutions.

2. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :
   $$(2\,x - y^2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 16\,\varphi = 0 \quad (E)$$
   sur le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2 < 2\,x\right\}$.

   (a) Représenter D. On admettra qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u,v) de Δ, associe : $h(u,v) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, v\right)$. Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

(c) Montrer que la fonction φ, de classe C^2 sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ, définie, pour tout (u,v) de Δ, par : $\psi(u,v) = (\varphi \circ h)(u,v)$, est solution sur Δ de (E') :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\,\psi = 0$$

(d) Déterminer toutes les solutions de (E') sur Δ.

Partie II

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.
2. Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?
3. On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \dfrac{(2\,n-1)\,I_{n-1}}{2\,n}$. (On pourra intégrer par parties.)

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de l'entier n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Partie III

1. Soit x un réel tel que : $|x| \leq \dfrac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de x, les deux solutions $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ de l'équation :

$$\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$$

2. Donner le domaine de définition $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$ de la fonction f qui, à tout réel x de $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$, associe :

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\,x}}{2}$$

3. Pour tout réel non nul α, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x de $]-1,1[$, associe $(1+x)^\alpha$.
4. Donner le développement en série entière de la fonction f, en l'écrivant sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n\, x^n \quad , \quad \forall\, x \,\in\, \mathcal{D}_S$$

où $\mathcal{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de S_0, et on exprimera les coefficients S_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, en fonction de n, sous forme de produit.
5. Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?
6. A l'aide de la question II.1, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\, S_{n-k} \quad (\star)$$

7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 2\,n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} 2\,n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$ est le coefficient binomial « $n-1$ parmi $2\,n-2$ ».
8. Etudier la convergence de la série de terme général S_n.
9. On appelle « mot de Dyck » une chaîne de $2\,n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^\star$, formée de n lettres A et n lettres B, telle que, lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB. Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck, alors que BA ou $AABBBA$ n'en sont pas.

   Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par C_n le nombre de mots de Dyck de $2\,n$ lettres.

   (a) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4.

   (b) On pose : $C_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}$.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = S_{n+1}$, et conclure.

La première partie présente une méthode originale montrant que toute solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est nécessairement d'une forme donnée, sans recourir aux démonstrations classiques habituellement basées sur du calcul matriciel.

La seconde partie étudie la convergence d'intégrales généralisées.

La troisième partie développe des résultats liés aux nombres de Catalan d'ordre n, S_{n+1} ou C_n ($n \in \mathbb{N}$), qui sont couramment utilisés en modélisation numérique (éléments finis). Le domaine géométrique auquel on s'intéresse est discrétisé et peut être approché par une surface polygonale par morceaux. Pour obtenir une bonne approximation géométrique, on divise chaque polygone en triangles. Le nombre de configurations possibles pour trianguler un polygone convexe à $n+2$ sommets est donné par le nombre de Catalan d'ordre n.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Un nombre non négligeable de copies sont beaucoup moins bien présentées que l'an dernier : illisibles, indéchiffrables, raturées de partout, ... Ces copies ont été pénalisées. Des copies sont encore écrites avec une encre si pâle que l'on peine à comprendre ce qui y figure.

En ce qui concerne l'orthographe, elle est encore souvent mise à mal.

Enfin, nous rappelons comme lors de la session précédente que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a*. Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : ≪ D'après le résultat de la question ... ≫.

- ⇝ Le résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On trouve toutefois des copies avec des résultats incorrects, résultant de la non-maîtrise de calculs basiques : $\sqrt{b^2 - 4\,c}$ n'est pas égal à $b^2 - 4\,c$. Quelques candidats donnent la réponse en fonction d'un discriminant qu'ils n'ont pas défini, d'autres laissent un coefficient « a », sans voir qu'il vaut 1. On note aussi quelques erreurs dans les relations coefficients-racines.

   (b) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On notera que certains candidats se sont lancés dans des calculs très compliqués (pas loin d'une page), en utilisant les expressions avec les radicaux obtenues à la question précédente.

   (c) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de copies, même si de nombreux candidats remplacent $y(t)$ par $e^{r_i t}$, $i = 1, 2$, et vérifient que l'équation est vraie. Par ailleurs, des candidats s'étant trompés sur les relations coefficients-racines du début essayent de faire croire qu'ils ont la solution, en concluant avec des formules du genre « on peut remplacer un $+$ par un $-$ ».

   (d) Cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats, faute de savoir ce qu'est une solution de $(\mathcal{E}_H)$. De très nombreux candidats (la majorité) partent du résultat en supposant l'existence de C_1 et C_2.

   (e) Comme la précédente, cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats. Certains candidats évoquent un résultat du cours, sans voir que le but de cette question est de le retrouver. D'autres invoquent le fait que l'espace des solutions est de dimension 2, mais oublient de prouver la liberté de la famille $\left(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right)$. Enfin, de nombreux candidats résolvent la première équation de la question précédente (en donnant la solution sous la forme de la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre), mais oublient de considérer la seconde équation.

   (f) *i.* Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si on trouve un nombre non négligeable de réponses fausses (en exponentielles diverses, exponentielles-polynômes, fonctions trigonométriques). Il est un peu incroyable de voir des candidats laisser $\sqrt{16}$ à ce niveau !

   ii. Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. Toutefois, des candidats ayant donné une réponse correcte à la question précédente, ne donnent pas la bonne réponse à celle-ci. Un nombre non négligeable de candidats donne la fonction identiquement nulle comme solution. On trouve aussi des solutions en e^{3t}, e^{5t}. Des candidats affirment qu'il y a une infinité de solutions (ou mieux : ≪ deux uniques solutions ≫ !)

2. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si, trop souvent la parabole (bien orientée) est dessinée sans plus de précisions, on ne sait pas ce qu'est le domaine $\mathcal{D}$ pour le candidat. On trouve aussi de nombreuses réponses fantaisistes : carré, rectangle, disque, demi-plan, etc ...

   (b) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats. Très peu de candidats vérifient que les applications vont bien de $\mathcal{D}$ dans Δ, et réciproquement. Certains pensent que le fait que la fonction h soit à valeurs dans $\mathcal{D}$ suffit pour montrer que h est bijective. On trouve, trop souvent, que la fonction (de deux variables) est ≪ strictement croissante, donc bijective ≫ (SIC). D'autre part, le signe positif devant la racine dans l'expression de l'application réciproque est très rarement justifié, alors que le système est résolu par équivalences.

   La grande majorité des candidats prouve le caractère C^1 par le fait que les fonctions coordonnées sont C^1, très peu montrent que les dérivées partielles sont continues. D'autres, encore, n'ont pas fait attention que les applications en jeu n'étaient pas linéaires, et font intervenir des noyaux. Certains confondent l'application réciproque h^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{h}$.

   (c) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats, qui montrent avoir compris la dérivation composée. Un nombre non négligeable de candidats ne sait visiblement pas traiter ce type de question, et essaye de noyer le poisson soit en utilisant les réponses de l'énoncé sans rien démontrer, soit à travers une succession de calculs complètement faux où des éléments de $\mathbb{R}^2$ sont considérés comme des réels. Très souvent, la rédaction laisse à désirer. En particulier, peu de candidats concluent correctement quant à l'équivalence.

   (d) Cette question a été correctement traitée par un faible nombre de candidats. Les correcteurs ont noté beaucoup de confusions au niveau des variables : des ≪ t ≫, en lieu et place des ≪ v ≫, des ≪ x ≫, au lieu des ≪ u ≫, etc ...

Partie II

1. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si de nombreux candidats proposent une valeur pour β^2, et non pour β.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par tous les candidats. Peu de candidats précisent que la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$, ne font pas mention du fait que le dénominateur ne s'annule pas, et disent que le problème ne se situe

qu'en $+\infty$, et $-\infty$. De même, peu précisent que les équivalents sont positifs.
De nombreuses copies se réfèrent à des intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\,n+2}}$ données comme convergentes. D'autres affirment que comme l'intégrande est de limite nulle en l'infini, alors l'intégrale converge. D'autres, encore, n'ont pas compris la notation « petit o », ou pensent que la variable d'intégration est α. D'autres encore font référence à des séries de Riemann.

En ce qui concerne la valeur de l'intégrale I_0, elle n'est pas toujours correctement donnée. De nombreux candidats obtiennent une valeur nulle.

3. (a) Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats. Parmi ceux-ci, très peu donnent une réponse rigoureuse en se ramenant à une intégration par parties sur un segment. On trouve beaucoup de calculs complètement erronés, avec des arctangentes divers, qui donnent, au bout du compte, la réponse clairement recopiée sur l'énoncé.

   (b) Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Beaucoup donnent une réponse certes correcte, mais sans aucune justification, avec des arguments du type « de façon évidente », ou « par une récurrence évidente ». On trouve, aussi, beaucoup de réponses complètement fausses.

Partie III

1. Cette question, facile, a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si certains étudient le cas $\Delta < 0$, ou $\Delta = 0$, sans lire l'énoncé.

   Un nombre non négligeable de candidats pensent que le discriminant est négatif pour x négatif, et donnent alors des racines complexes.
   On trouve aussi des réponses complètement fausses.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Un certain nombre de copies donnent la réponse $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, ou $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$, quand ce ne sont pas des choses fantaisistes comme $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Nous rappelons qu'un intervalle avec une borne $+\infty$ ou $-\infty$ ne peut être fermé en cette borne.

3. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Les réponses sont souvent très approximatives, avec un produit qui s'arrête à n au lieu de $n-1$. Nous rappelons que les coefficients binomiaux non entiers doivent être redéfinis en cas d'utilisation. Nous avons trouvé, dans de nombreuses copies, des « $\alpha\,!$ », « $\left(\frac{1}{2}\right)!$ ». Enfin, de trop nombreuses copies donnent des développements

en série entière où le « $n\,!$ » est remplacé par un « n ».

4. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée. Lorsque c'est le cas, les candidats font souvent une petite erreur à la fin (oubli du signe moins, ou du facteur $\frac{1}{2}$), c'est dommage. La valeur donnée pour le coefficient S_0 est souvent complètement erronée, alors qu'il suffisait de prendre la valeur de la fonction f en zéro. Certains candidats ont heureusement fait un calcul correct, et utilisent un changement d'indice, où la valeur qu'ils donnent pour S_0 est en fait celle de S_1.

5. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée, très peu de copies donnent la réponse attendue. Le produit de Cauchy de deux séries entières est confondu avec le produit de Cauchy de deux séries numériques. Des candidats ne semblent pas savoir de quoi il s'agit, confondent produit et somme, ou bien donnent des réponses complètement fantaisistes. Très souvent, les candidats mélangent les indices, ce qui donne des résultats totalement incohérents. On trouve aussi des réponses qui, de façon étonnante, en écho aux questions de la fin, donnent comme réponse :

   $$\sum \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k} \right) x^n$$

   En ce qui concerne le résultat sur le rayon de convergence de la série produit, il n'est que très rarement donné.

   Dans un nombre important de copies, les candidats confondent développement en série entière et développement limité.

6. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Elle a permis de différencier les candidats. Même s'ils sont minoritaires, ceux qui ont répondu à cette question l'ont bien traitée, ou, en tout cas, ont donné les bons arguments.

7. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Lorsque c'est le cas (pour les candidats qui ont obtenu la valeur correcte des S_n), c'est plutôt bien. Un nombre non négligeable de candidats essaye de noyer le poisson en faisant croire qu'ils obtiennent le résultat donné dans l'énoncé. D'autres tentent de répondre à la question en utilisant un raisonnement par récurrence, mais ans utiliser la valeur de S_n définie précédemment.

8. Cette question a été traitée par environ un quart des candidats. Nous avons trouvé une solution originale : le coefficient binomial étant à valeurs entières, on a donc $S_n \geq \frac{1}{n}$, ce qui conduit bien à la divergence de la série de terme général S_n.

   De nombreuses copies confondent la convergence de la série numérique $\sum S_n$, avec celle de la série entière $\sum S_n\, x^n$. Comme l'an dernier, de nombreux candidats veulent appliquer le critère de d'Alembert à la série entière $\sum S_n\, x^n$, mais ne savent pas conclure. Certains ne connaissent visiblement pas l'orthographe correcte de « d'Alembert ».

Certains candidats font un calcul correct et obtiennent bien que le rapport $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ tend vers 4, mais concluent sur la convergence de la série.

9. (a) L'énoncé donnait explicitement les valeurs des coefficients C_1 et C_2. Un nombre non négligeable de copies donne pourtant des réponses complètement différentes. Pour le coefficient C_3, la réponse correcte est en général donnée. Il n'en est pas de même pour C_4. De nombreuses copies donnent des résultats sans aucune justification.
   Les correcteurs ont apprécié les copies expliquant leur raisonnement à l'aide d'un arbre.

   (b) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats, qui ont montré une très bonne compréhension du problème posé. Ces copies ont été valorisées.

   (c) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats. Peu de copies ont exprimé clairement l'idée d'une relation de récurrence similaire. Quelques rares copies ont fait une récurrence forte.
   De nombreux candidats ont tenté un raisonnement par récurrence, mais sans jamais utiliser les caractéristiques des mots de Dyck ! Ce qui ne les empêche pas de conclure que la relation est juste.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Partie I

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour tout réel x, par :

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

1. Etudier la parité de f_n et g_n. En déduire un domaine d'étude de ces fonctions.
2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions f_1 et g_1 sur un même graphe.
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.
   (b) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$:
   $$\operatorname{sh}(t) \geq t.$$
   En déduire que $f_1(x) \geq g_1(x)$ pour tout $x \geq 0$.
   (c) A l'aide de ces éléments, représenter sur un même graphe les courbes représentatives respectives des fonctions f_1 et g_1 sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 10 cm.
3. On suppose $n \geq 2$.
   (a) Calculer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $g_n'(x)$.
   (b) Etudier les variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Montrer que, pour tout réel positif x : $f_n(x) \geq 0$ et $g_n(x) \geq 0$.
   (d) En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$:
   $$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$
   L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}^+$?
   (e) Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Déterminer :
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$
4. (a) Montrer que pour tout réel positif x :
   $$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$
   (b) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.
   (c) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ainsi que la majoration
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Partie II

Pour tout réel $t \geq 0$, on pose :

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x^2}}{1+x^2}\,dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

1. Montrer que h est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Que vaut $h(0)$?
3. (a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a, +\infty[$.
   (b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$, et en déduire que, pour tout réel positif t :
$$0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{2}$$
5. Montrer que h vérifie, pour $t > 0$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$
$$h'(t) - h(t) = -\frac{I}{\sqrt{t}}.$$
6. (a) Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^\star$, de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.
   (b) Soit $t_0 > 0$. A l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en t_0 de la fonction qui, à tout réel $t > 0$, associe $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.
   (c) Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $t > 0$,
$$h(t) = \left(k - I \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right) e^t \qquad (\star)$$
7. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$ est convergente, et que
$$\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx.$$
   (b) En faisant tendre t vers 0 dans $(\star)$, donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que pour tout $t \geq 0$
$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\,I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx\right) e^t.$$
8. Montrer que, pour tout réel positif t :
$$0 \leq \frac{\pi}{2} - 2\,I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2}\,e^{-t}.$$
9. En déduire la valeur de I.

Partie III

1. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n\,!\,(2n+1)}$.
2. Montrer que la fonction qui, à tout réel t, associe e^{-t^2}, est développable en série entière sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, et donner ce développement.
3. Montrer que :

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(2n+1)}$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\,(2k+1)}$. On admet le résultat suivant :

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)\,!\,(2\,n+3)}$$

   (a) Proposer, uniquement avec les données fournies par le problème, une méthode permettant de déterminer une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

   (b) Donner un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à 10^{-3} près (r pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer r sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).

On étudie, dans ce problème, diverses propriétés des fonctions gaussiennes, dont un exemple bien connu est la densité de probabilité de la loi normale

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est l'espérance mathématique, et σ l'écart-type.

Ces fonctions sont très utilisées, notamment, en physique statistique. Ainsi, en théorie cinétique des gaz, la loi de distribution de vitesses de Maxwell, qui est gaussienne, permet de quantifier la répartition des molécules entre les différentes vitesses dans un gaz en équilibre thermodynamique global, à température uniforme.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

En ce qui concerne la présentation des copies, on note un effort très important des candidats, les copies sont, en général, très bien présentées. Toutefois, il reste encore un nombre non négligeable de copies à peu près illisibles (soit à cause d'une encre tellement pâle qu'elle en devient presque transparente, soit parce que c'est, vraiment, indéchiffrable). On ne peut que recommander l'encre noire, qui facilite la lecture du correcteur. Le stylo à bille n'a pas ces défauts, mais les copies ainsi écrites donnent souvent une impression de relâchement désagréable. Rappelons que bien souvent l'exactitude, ou la fausseté, d'une solution tient à peu de chose : un indice dans une somme, un exposant dans une expression ... et c'est ce que le correcteur va rechercher.

L'orthographe est de plus en plus mise à mal. Le nombre de mots utilisés dans un devoir de mathématiques n'est pas tel qu'on puisse excuser certaines fautes comme ≪ une limitte ≫, ≪ un interval ≫, ≪ une intégral ≫ ... La conjugaison est aussi parfois bien approximative. Pour se limiter aux verbes du premier groupe, on a vu dans la même copie ≪ On a montrer ≫, et ≪ On va montré ≫. Le sort des verbes ≪ résoudre ≫, ou ≪ déduire ≫ est encore moins enviable ... Certains noms propres sont écorchés (≪ Dalembert ≫, au lieu de ≪ D'Alembert ≫).

En ce qui concerne les abréviations, celles-ci sont à proscrire (≪ cv ≫, au lieu de ≪ converge ≫).

Nous rappelons également aux candidats que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

- ⇝ Tout résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a*. Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

- ⇝ Tout résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : ≪ D'après le résultat de la question ... ≫.

- ⇝ Tout résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

D'autre part, les candidats ont tendance à utiliser partout et incorrectement les symboles « $\Longrightarrow$ », et « $\Longleftrightarrow$ », alors qu'il n'y a pas d'équivalence. Un raisonnement mathématique n'est pas une succession de symboles utilisés à tout bout de champ, une rédaction appropriée avec l'emploi de « donc », « soit », « d'où », permet d'éviter de telles incorrections, et facilite, en outre, la compréhension. Enfin, nous rappelons qu'il faut bien faire la distinction entre une fonction, objet mathématique (disons « f »), et son expression en un réel x.

Il y a, aussi, fréquemment des confusions entre les différentes variables, ce qui est très grave (entre n et x en première partie, entre x et t pour les intégrales à paramètres, et entre t et t_0 pour les équations différentielles).

Enfin, certains candidats ne lisent pas bien l'énoncé ou ne répondent pas à la question posée, font le sujet dans un désordre complet : dans ce cas, il est préférable de préciser sur la copie que certaines questions sont traitées ultérieurement.

Remarques particulières

Partie I

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, bien que peu utilisent les quantificateurs :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(-x)$$

   ou une formulation équivalente en français. Ils se contentent souvent de calculer $f(-x)$, sans que le « x » n'ait été défini.

   Certains ne semblent pas connaître les notions de parité/imparité pour une fonction numérique réelle. Et une fonction paire n'est pas une « fonction symétrique par rapport à 0 ».

2. (a) La plupart des candidats connaissent les propriétés des fonctions hyperboliques. Certains reviennent à la définition avec l'exponentielle et s'en sortent très bien. Nous rappelons que la fonction sinus hyperbolique est notée « sh ».

   (b) Cette inégalité n'a pas toujours été démontrée correctement. Certains candidats donnent le résultat sans aucune justification. D'autres veulent utiliser un développement limité, ce qui ne peut conduire au résultat.

   (c) En ce qui concerne le tracé : certains candidats ne tracent qu'une seule des deux courbes ; certains ne répondent pas à la question posée, qui est de tracer le graphe sur $[0, 1]$ (on trouve des graphes sur $[-1, 1]$) ; le papier millimétré n'est pas toujours utilisé (graphe sur la copie, calculs sur la feuille de papier millimétré) ; l'échelle n'est pas toujours respectée ; d'autres omettent la légende, on ne sait pas laquelle des deux courbe est le graphe de f_1 ; certains tracés sont complètement erronés (valeur -1 pour chacune des deux fonctions en zéro) ; les concavités sont parfois très fantaisistes. A côté, certaines copies avaient des graphes très soignés. L'usage de couleurs a été apprécié.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Peu de candidats néanmoins insistent sur le fait que les fonctions sont dérivables comme somme, composées de fonctions dérivables.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, l'étude du signe de chacune des dérivées manque, souvent, de justifications : étudier les variations des fonctions ne consiste pas à simplement donner un tableau de variations. Celui-ci n'est pas toujours donné, les candidats se contentant d'écrire : « la fonction est croissante ». Nous rappelons que faire un tableau de variations facilite, énormément, la lecture, et pour le correcteur, et pour le candidat. Certains candidats oublient de conclure, après avoir bien prouvé que les dérivées sont positives. Un certain nombre de copies contient l'erreur consistant à déterminer les réels x pourlesquels $f_n(x) = 0$, puis en déduire les variations de f_n. Tous les candidats ne lisent pas bien la question, en s'embarquant dans de laborieux équivalents en $+\infty$, alors que seules les variations des fonctions sont demandées.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Cependant, certains candidats étudient, inutilement, les limites en $+\infty$.

   (d) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   Très peu de candidats justifient que le passage à la puissance n (ou $-n$) est valide car la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^n, est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que, pour tout réel x de $[0, \sqrt{n}]$: $1 - \dfrac{x^2}{n} \geq 0$.

   A la question « l'inégalité de droite est-elle vraie pour les réels positifs ? », il convient de donner une réponse argumentée. Un simple « oui » ne suffit pas.

   (e) Les limites demandées étaient classiques : moins d'un candidat sur quatre trouve la valeur exacte, parmi les réponses données, on trouve : zéro, 1, $+\infty$. De nombreux candidats composent l'équivalent par l'exponentielle, ce qui n'est pas possible, au lieu de raisonner avec des « o ». Et écrire « de même », sans plus de détails, est insuffisant dans ce contexte pour prouver la deuxième limite.

4. (a) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Ceux qui l'ont fait passent, en général, par une étude de fonction. Seules les très bonnes copies ont pensé à utiliser la formule du binôme de Newton. La majorité des candidats ayant commencé cette question utilisent des inégalités sans justification. Souvent, ces inégalités reviennent à écrire « $x^2 < \dfrac{x^2}{n}$ ».

(b) Certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant ≪ car $\frac{1}{2} < 1$ ≫, ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann de référence. De nombreux candidats écrivent des égalités ou inégalités avant d'avoir prouvé la convergence des intégrales. Par exemple, plutôt qu'écrire ≪ $\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \int_1^{\infty} \varphi(t)\,dt$ ≫, il convient d'écrire ≪ $\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ et $\int_1^{\infty} \varphi(t)\,dt$ convergent ≫. D'autre part, De nombreux candidats oublient de préciser que les critères de comparaison (par inégalité ou équivalent) nécessitent que les fonctions soient positives au voisinage de $+\infty$. Enfin, nous rappelons aussi qu'une intégrale de la forme $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge non pas parce que l'intégrande est continue en 0, mais parce qu'elle l'est sur $[0, 1]$.

(c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

Partie II

1. Cette question a souvent été traitée de manière approximative : de nombreux candidats se contentent de vérifier la convergence de l'intégrale ; pour l'hypothèse de domination, certains candidats majorent l'intégrande par 1 ou e^t, en affirmant que la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$ (ou l'exponentielle) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; enfin, on trouve aussi une faute courante consistant à majorer $e^{-t\,x^2}$ par e^{-x}, e^{-t}, sans se soucier de la position de t par rapport à 1.

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

3. (a) Comme en II. 1, cette question a souvent été traitée de manière approximative, avec les mêmes erreurs qu'en II. 1. Un nombre non négligeable de candidats dérive par rapport à la mauvaise variable. On ne peut que les inciter à prendre du recul face à une dérivée trop compliquée à utiliser par la suite. De même, ces candidats ne se posent pas la question de savoir pourquoi on regarde ce qui se passe sur $[a, +\infty[$, et non sur $\mathbb{R}^+$ comme à la question 1.

   (b) En général, les candidats se contentent de dire que cela découle de la question précédente sans plus de précision. Les bonnes copies précisent qu'on peut recouvrir $\mathbb{R}^+$ avec les intervalles $[a, +\infty[$, $a > 0$.

4. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La positivité de l'intégrale est souvent bien utilisée. En revanche, on trouve dans de nombreuses copies (parfois bonnes) que la limite de h en l'infini est 1, sans aucune justification. De nombreux candidats prouvent la positivité de h en passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, sans justifier l'interversion limite-intégrale.

5. Cette question n'a été traitée que par un petit nombre de candidats. Cette question dépend beaucoup de la question 3. *a.*, et certains candidats ont perdu beaucoup de temps à cause d'un calcul erroné de la dérivée. La plupart d'entre eux n'ont pas pensé à faire un changement de variable dans l'intégrale représentant $h'(t) - h(t)$. Certains candidats se contentent de donner un résultat sans aucune justification.

6. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats donnent les solutions $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto A\,e^{-t}$, $A \in \mathbb{R}$, ou omettent la constante A. Quelques candidats donnent $\frac{\pi}{2}$ comme constante.

   (b) La question était posée de manière très claire, pourtant, certains candidats ont cherché, en vain, une primitive à l'aide des fonctions usuelles. De nombreux candidats gardent t comme borne et comme variable d'intégration.

   (c) Les bonnes copies utilisent la méthode de variation de la constante, ou montrent que la fonction h est une solution particulière. Cette dernière méthode est également utilisée dans les copies moins bonnes, mais la rédaction y est très confuse.

7. (a) Comme en I., certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant « car $\frac{1}{2} < 1$ », ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann de référence. D'autre part, nous rappelons que ce n'est pas parce que deux intégrales sont de même nature, qu'elles sont égales. On trouve, aussi, dans de nombreuses copies, une étude en l'infini de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, ce qui n'a pas d'intérêt ici. Enfin, si le changement de variable est correctement effectué, le caractère C^1 bijectif du changement de variables est souvent absent de la rédaction. Nous rappelons également que $\sqrt{x^2} = |x|$ et vaut x si et seulement si x est positif.

   (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu des candidats, il fallait justifier que l'on prenne $t_0 = 0$, ou que l'on utilise la relation de Chasles, ce qui n'a en général pas été fait du tout (le remplacement de t_0 par 0 étant fait sans aucune justification).

8. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, par contre, la justification $e^{-t} > 0$ n'est pas toujours présente. Certains candidats justifient en disant que

l'exponentielle est croissante, d'autres disent les deux ...

9. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains donnent des valeurs fantaisistes, en contradiction complète avec ce qu'ils ont écrit auparavant.

Partie III

1. Cette question a donné lieu à pas mal d'erreurs : de nombreuses majorations sont fausses ou non justifiées ; la règle de d'Alembert est parfois utilisée incorrectement (de nombreux candidats ne prennent pas la valeur absolue du quotient) ; certains candidats semblant penser que le quotient de deux termes consécutifs doit être inférieur à 1 pour que la série converge. D'autre part, certains candidats confondent série numérique et série entière.

2. Il fallait, ici, absolument donner la valeur du rayon de convergence de la série entière, ce qui n'a pas toujours été le cas : le développement en série entière de l'exponentielle est connu, mais le domaine où il est valable est souvent omis ou faux.

3. Très peu de candidats ont correctement justifié l'intégration terme à terme de la série entière. Et étant donné que la formule à trouver est donnée dans la question, il convient de détailler le raisonnement. En particulier une primitive de la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^{2n}, doit être donnée.

4. (a) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. De nombreux candidats veulent choisir un entier n tel que $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} = \varepsilon$, au lieu de $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} \leq \varepsilon$, ce qui semble difficile à réaliser. Dans les bonnes copies seulement on trouve une méthode clairement exposée (sinon, c'est en général une suite de calculs sur les restes d'une série convergente, sans lien direct avec la question).

   (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Quelques candidats poussent le développement trop loin.

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

100

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Partie I

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

1. (a) Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n\,!} \qquad (\mathcal{E})$$

   (b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

   (c) Résoudre $\mathcal{E}$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

   (d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.

   (e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}\, e^t}{(n+1)!}$$

   (f) Retrouver, à l'aide de ce qui précède, le développement en série entière en 0 de la fonction exponentielle, en précisant son rayon de convergence. Tous les résultats devront être justifiés.

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star \,:\, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\,\frac{1}{n!}$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :

$$u_q < e < v_q$$

   (d) On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que :

$$e = \frac{p}{q}$$

   En multipliant la double inégalité précédente par $q\,!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationnalité de e.

(e) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

i. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|u_n - e| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Montrer qu'il existe un rang n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$:

$$|w_n - e| \leq \varepsilon$$

iii. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

3. On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}, n>1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n > 1 : e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie II

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que :

$$g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]0,1] : g(x) = x \ln x$$

1. Etudier la continuité et les variations de la fonction g, puis tracer sa courbe représentative sur $[0,1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 cm sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées.
2. En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe, et donner sa valeur.
3. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

5. Montrer que, pour tout réel x de $[t_0, e^{-1}]$:

$$\left|g(x) - g(e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2\,t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\left|t_n - e^{-1}\right| \leq 2\,t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2\,t_0}\right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

8. On pose :

$$I = \int_0^1 x^{-x}\,dx$$

   (a) Montrer que I est une intégrale convergente.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x\,dx + \int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx$$

   où on exprimera $\tilde{R}_n$ à l'aide de la fonction R_n introduite en partie I.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\right| \leq \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}$$

   (d) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x\,dx$$

   i. Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.

   ii. Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}$$

   iii. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

   (e) Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Partie III

1. Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.
2. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

3. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\left(\dfrac{4^n\, n^n\, n\,!}{(2\,n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ce problème met en œuvre des techniques usuelles d'analyse, qui montrent que le nombre transcendant e (aussi appelé Nombre d'Euler, ou constante de Neper), qui n'est donc solution d'aucune équation algébrique, peut s'exprimer soit comme limite de suites convergentes, ou bien comme somme d'une série.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Nous avons les remarques suivantes :

1. Au début du sujet, se trouvaient de nombreuses questions très simples. Une minorité de candidats traite correctement ces questions.

2. Plus de la moitié des candidats ne semblent pas maîtriser la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un, avec second membre.

3. Les ≪ démonstrations graphiques ≫ où le candidat ≪ voit sur le dessin que cela marche ≫ ne peuvent donner lieu à comptabilisation de points.

4. Comme l'an dernier, nous avons trouvé un nombre élevé de copies ≪ vides ≫, où le candidat se contente de mettre (très proprement en général) les numéros des questions avec, à côté, des blancs. Ces candidats ayant fait l'effort de venir passer l'épreuve, nous ne leur avons pas mis la note ≪ zéro ≫. Nous avons aussi trouvé un nombre élevé de copies où tout ce qui est traité est faux. Là encore, ces candidats ayant fait l'effort de rendre une copie, nous ne leur avons pas mis la note ≪ zéro ≫.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question n'a pas toujours été très correctement traitée. Certains candidats donnent le résultat sans aucune justification. D'autres tentent de faire un changement d'indices, mais on trouve beaucoup d'aberrations ou de choses fausses (≪ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{(k-1)\,!}$ ≫ ou ≪ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - k\,t^{k-1}}{k\,!}$ ≫).

   (b) La plupart des candidats donnent correctement la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$. Par contre, un nombre non négligeable écrit que ≪ la solution générale est e^t ≫.

(c) Très peu de candidats arrivent à résoudre $\mathcal{E}$. On trouve beaucoup de réponses avec des intégrales sans aucune borne, des intégrales sur $\mathbb{R}$, ou encore des intégrales de 0 à $+\infty$. D'autre part, beaucoup de candidats utilisent t comme variable pour R_n, mais aussi comme variable d'intégration, et simplifient abusivement le terme en e^t.

(d) Très peu de candidats remarquent que $R_n(0) = 0$, et donc très peu répondent correctement à cette question.

(e) Cette question n'est traitée correctement que par très peu de candidats.

(f) Très peu de candidats donnent une réponse correcte. On trouve beaucoup de réponses fantaisistes, qui donnent, comme rayon de convergence, « 1 », « $\mathbb{R}$ », « $-\infty$ ». En outre, beaucoup de candidats écrivent une égalité entre e^t et le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!}$.

2. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. On trouve cependant un nombre non négligeable de réponses inquiétantes où les candidats écrivent que « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ », et simplifient de même le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Dans d'autres copies, les candidats ne semblent pas faire de différence entre $\dfrac{1}{(n+1)!}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.
Le calcul est, globalement, souvent mal fait pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec une conclusion hâtive (les candidats ayant compris qu'elle était décroissante).

(b) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. La notion de suite adjacente semble maîtrisée par l'ensemble des candidats (cette remarque vaut aussi pour les copies très faibles, qui ont gagné des points à cette question). Toutefois, certains n'hésitent pas à dire que les suites sont adjacentes alors même qu'ils ont conclu qu'elles étaient de même monotonie.

(c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée, beaucoup de candidats se contentent d'écrire le résultat sans aucune justification. Un nombre non négligeable de candidats n'ont pas compris ce qu'était e, on trouve, dans les copies : « il existe e tel que ... »

(d) Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats.
Il est dommage de voir que certains candidats semblaient comprendre pourquoi un tel encadrement ne pouvait être possible, mais n'arrivaient pas à l'exprimer clairement. En revanche, beaucoup de candidats ont essayé de « tromper » le correcteur en utilisant des arguments farfelus pour pouvoir conclure.

(e) *i.* Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats confond « il existe » avec « quelque soit ».

ii. Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats.

iii. Cette question n'a pas toujours été correctement traitée.

3. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Partie II

1. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats ne connaissent pas la limite lorsque x tend vers zéro par valeurs supérieures de l'expression $x \ln x$. De plus, beaucoup ne justifient pas la continuité et la dérivabilité, certains confondent ces deux notions.

2. Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Beaucoup de candidats donnent zéro comme réponse, ou bien donnent une valeur négative.

3. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Beaucoup de candidats affirment que « $t_0 < t_1$ car ils sont dans le même intervalle ».

4. Très peu de candidats connaissent l'inégalité de Taylor-Lagrange. Nous avons trouvé beaucoup de réponses très fantaisistes. En outre, une grande proportion de candidats ne semble pas savoir que la dérivée $k^{ième}$ d'une fonction, pour $k \in \mathbb{N}$, se note $f^{(k)}$ et non f^k.

5. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

6. Cette question a rarement été correctement traitée. En outre, le 2^n est fréquemment confondu avec $2\,n$.

7. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Mais il est inquiétant de lire plusieurs candidats écrire : « la suite est croissante et majorée par e^{-1} DONC converge vers e^{-1} ».

8. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats ne semblent pas faire la différence entre la continuité et le prolongement par continuité.

(b) Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

(c) Cette question a rarement été correctement traitée.

(d) *i.* Cette question a très rarement été correctement traitée. Un nombre non négligeable de candidats écrit que, ≪ au voisinage de zéro, $x^p \ln^q x$ est équivalent à x^p ≫, ou, encore, que $x^p \ln^q x \leq x^p$ ≫.

ii. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

iii. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

(e) Cette question a rarement été correctement traitée.

Partie III

1. Très peu de candidats énoncent de façon correcte le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann. Un nombre non négligeable de candidats confond l'expression dépendant de l'entier n, et sa limite. Enfin, beaucoup de candidats ne semblent connaître le résultat que dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

2. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

3. Cette question a très rarement été correctement traitée.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. On considère la fonction h, impaire, 2π périodique, dont la restriction à $[0,\pi[$ est donnée par :

$$h(x) = x$$

   (a) Donner les coefficients de Fourier, notés $a_n(h)$ $(n \geq 0)$ et $b_n(h)$ $(n \geq 1)$, de la fonction h.

   (b) Rappeler le théorème de Dirichlet.

   (c) En déduire la convergence de la série de Fourier de h, et son expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Montrer que, pour tout réel x de $[0,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}$$

   (e) En déduire :

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t\,dt$$

   (a) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,dt$$

   (b) Montrer que :

$$J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,dt$$

   (c) Rappeler les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe.

   (d) Rappeler la formule du binôme de Newton.

   (e) Calculer, pour tout entier relatif k : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ikt}\,dt$.

   (f) A l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t, $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.

   (g) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n} t\,dt$?

   (h) En déduire :

$$J_n = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n\,n!}\,\pi$$

Partie II

On considère les fonctions ϕ et ψ, respectivement définies par :

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt \ , \ \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,dt$$

1. Montrer que, pour tout réel t strictement positif : $\dfrac{|\sin t|}{t} \leq 1$.
2. Montrer que ϕ et ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
3. Soit a un réel strictement positif. Etudier la continuité et la dérivabilité de ϕ et ψ sur $[a, +\infty[$.
4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $\phi'(x)$ et $\psi(x)$.
   (On pensera à remarquer que $\psi(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,dt$ afin de pouvoir intégrer par parties)
5. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
$$\phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$
6. Montrer que ϕ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x)$ pour tout réel strictement positif x.
8. On admet que :
$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$
   Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$?

Partie III

Soit $c \in [0, 1[$. On pose :

$$I(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - c^2\sin^2 t}}$$

1. Montrer que $I(c)$ est bien définie.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).

(d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\, f'(x) - x\, f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_f)$$

(e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, x^n$$

i. Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.

ii. Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.

iii. Donner le développement en série entière de f.

3. On suppose que :

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p}\, c^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\, dt$$

En utilisant les résultats du I, en déduire l'expression de $I(c)$ sous la forme :

$$I(c) = \pi\, S$$

où S désigne la somme d'une série où les termes $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\, dt$, $p \in \mathbb{N}$, n'apparaissent plus.

Dans ce problème, on présente diverses méthodes de calcul du nombre transcendant π. Dans la première partie, on retrouve les intégrales de Wallis, que l'on calcule sans utiliser de relation de récurrence. Dans la seconde partie, on fait apparaître l'intégrale de Dirichlet, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, qui donne le calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur la demi-droite des réels positifs. Les relations permettant d'exprimer π en fonction de la somme d'une série permettent son calcul approché. La série de la partie III permet un calcul approché avec une convergence quadratique, donc plus puissante.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Le sujet présente diverses méthodes de calcul du nombre transcendant π. Dans la première partie, on retrouve les intégrales de Wallis, que l'on calcule sans utiliser de relation de récurrence. Dans la seconde partie, on fait apparaître l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, qui donne le calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur la demi-droite des réels positifs. Les relations permettant d'exprimer π en fonction de la somme d'une série permettent son calcul approché.

Nous avons les remarques suivantes :

1. Au début du sujet, se trouvaient de nombreuses questions, de cours ou bien très simples. A peine 10% des candidats sont capables d'énoncer correctement le théorème de Dirichlet. Une proportion inquiétante de candidats ne semble rien avoir compris aux séries de Fourier et à la périodicité. Beaucoup de points ont été perdus sur ces questions.

2. En ce qui concerne les intégrales de Wallis, nous avons constaté qu'un nombre élevé de candidats ne maîtrisent pas les formules de trigonométrie de base ($\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$), confondent parité et imparité ; nous rappelons que les ≪ démonstrations graphiques ≫ où le candidat ≪ voit sur le dessin que cela marche ≫ ne peuvent donner lieu à comptabilisation de points.

3. La notion de dérivabilité n'est pas maîtrisée par beaucoup de candidats, qui affirment d'emblée que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est dérivable.

4. 10% des candidats semblent avoir compris ce qu'est une intégrale à paramètres. Pour les autres, la notion d'existence de l'intégrale est confondue avec celle de la fonction que l'on intègre. Il en est de même pour la continuité et la dérivabilité des intégrales

à paramètres. Beaucoup de candidats écrivent des majorations soit sans aucune valeur absolue, alors que des sinus ou cosinus sont en jeu, soit, pire, par des quantités négatives.

5. Les majorations ne sont quasiment jamais justifiées.

6. Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ semble avoir posé de gros problèmes à un nombre élevé de candidats. Nous avons trouvé, comme réponses « $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ », « $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ », « $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ », SIC.

7. Nous avons trouvé un nombre élevé de copies « vides », où le candidat se contente de mettre (très proprement en général) les numéros des questions avec, à côté, des blancs. Ces candidats ayant fait l'effort de venir passer l'épreuve, nous ne leur avons pas mis la note « zéro ». Nous avons aussi trouvé un nombre élevé de copies où tout ce qui est traité est faux. Là encore, ces candidats ayant fait l'effort de rendre une copie, nous ne leur avons pas mis la note « zéro ».

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question a été correctement traitée par environ 40% des candidats.
   (b) Cette question n'a été que peu souvent correctement traitée ; il manque toujours une hypothèse : périodicité, caractère C^1 par morceaux.
   (c) Cette question n'a été correctement traitée que par ceux ayant traité la question 2.
   (d) Même remarque.
   (e) Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Beaucoup de candidats se trompent en proposantde faire un « changement d'indices en posant $n = 2\,n'+1$, ce qui est incorrect, ou bien ne justifient rien, le $(-1)^n$ apparaît comme par magie.
2. (a) Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Un nombre élevé de candidats affirme que « cela se voit sur un dessin », ou bien que « la fonction *sinus* présente une symétrie ou une « parité en $\frac{\pi}{2}$ ».

   Beaucoup de candidats écrivent des relations d'égalité entre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,dt$ et $\left[\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\sin^{2n-1} t}{2\,n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$.
   Quelques candidats ont reconnu les intégrales de Wallis. Certains ont redémontré intégralement les relations de récurrence, lorsque cela était fait correctement et que la réponse à la question posée était correcte, les points ont bien sûr été accordés.

(b) Cette question n'a été que rarement correctement traitée, dans la continuité de la précédente.

(c) Les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe, sont, en général, connues.

(d) La formule du binôme de Newton, est, en général, connue.

(e) Très peu de candidats remarquent qu'il faut distinguer le cas $k = 0$.

(f) Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Outre les erreurs provenant de la question précédente, une partie des candidats n'a pas fait attention au fait que, dans la formule du binôme de Newton requise ici, la somme devait aller jusqu'à $2\,n$ et non n.

(g) Cette question a été très rarement traitée.

Partie II

1. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Nous avons trouvé beaucoup de réponses fausses et complètement aberrantes. Ainsi, des candidats partent de l'inégalité $\sin t \leq 1$ pour tout réel t, et en déduisent, toujours pour tout réel t, « $\dfrac{\sin t}{t} \leq \dfrac{1}{t} \leq 1$ » SIC.
   D'autres candidats écrivent que, « en zéro, $\sin t \sim t$ » et que, « donc, pour tout t, $\dfrac{\sin t}{t} \leq 1$ ».
2. Moins de la moitié des candidats ont traité correctement cette question. Le problème est que beaucoup confondent l'existence de l'intégrale avec celle de l'intégrande. Pour ϕ, le lien avec la question précédente n'a pas souvent été vu.
3. Une proportion faible de candidats a traité correctement cette question. Les intégrales à paramètres semblent poser de gros problèmes de compréhension aux candidats. Certains éprouvent le bseoin de remplir parfois plus d'une copie double (donc plus de 4 pages) pour traiter (souvent mal) cette question.
4. Cette question a été traitée par beaucoup de candidats. En général, les choses sont faites très correctement, ce qui a été apprécié par les correcteurs.
5. Cette question a été traitée par beaucoup de candidats.
6. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
7. Comme la précédente, cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
8. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. On trouve beaucoup de réponses aberrantes, un nombre important de candidats obtenant la valeur 0 comme réponse. Quelques candidats ayant obtenu cette réponse fausse ont expliqué sur leur copie pourquoi ce résultat était aberrant. Ces copies ont été valorisées.

Partie III

1. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
2. (a) Peu de candidats savent donner le bon domaine de définition. Cette question est une question de niveau lycée.
   (b) Cette question a été correctement traitée par les candidats ayant répondu correctement à la précédente. Trop souvent, les réponses ne sont pas justifiées.
   (c) Cette question a relativement souvent été traitée. Malheureusement, beaucoup de candidats se contentent, comme argument, de donner « par théorème de cours », sans énoncer ledit théorème, ni verifier que les hypothèses sont satisfaites.
   (d) Cette question a, en général, été traitée, et a, finalement permis aux candidats de gagner des points, beaucoup plus que celles du début de la première partie. La majorité des candidats semble maîtriser les séries entières. Il est à noter que certaines copies n'ont absolument pas abordé la partie I, ces copies commencent par la partie III, suivie de la II.
   (e) *i.* Cette question a, en général, été traitée.
       ii. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
       iii. Cette question n'a pas toujours été traitée.
3. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

Épreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Préambule

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = h(t) \ \ (\mathcal{E})$$

où a, b, c et h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, et telles que a ne s'annule jamais.

1. Soit y une solution de $(\mathcal{E})$.
   Pour tout réel t, on pose :
   $$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$
   Montrer que Y est solution du système différentiel $(\mathcal{S})$:
   $$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$?

3. Soit (u, v) une base de solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$.
   Pour tout réel t, on pose :
   $$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \ , \ V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$
   On recherche une solution de $(\mathcal{S})$ sous la forme :
   $$W(t) = \lambda(t)\,U(t) + \mu(t)\,V(t)$$
   où λ et μ sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à déterminer.

   On pose :
   $$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$
   Montrer que W est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout t de $\mathbb{R}$:
   $$\lambda'(t)\,U(t) + \mu'(t)\,V(t) = H(t)$$
4. En déduire que, pour tout réel t :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda'(t)\,u(t) + \mu'(t)\,v(t) & = & 0 \\ \lambda'(t)\,u'(t) + \mu'(t)\,v'(t) & = & \frac{h(t)}{a(t)} \end{array} \right.$$

Partie I

1. *i.* On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p\, t^{2p}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.

   ii. On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p\, t^{2p+1}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_c)$: $y'' = 0$.

3. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}_h)$: $(1+t^2)\, y''(t) + 4\,t\,y'(t) + 2\,y(t) = 0$.

   (a) Soit f une solution de $(\mathcal{E}_h)$, définie sur $\mathbb{R}$.

   i. Montrer que la fonction $t \mapsto (1+t^2)\, f(t)$ est une fonction affine de t (on pensera à calculer sa dérivée seconde).

   ii. Montrer que $\left(t \mapsto \frac{1}{1+t^2}, t \mapsto \frac{t}{1+t^2}\right)$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E}_h)$.

   (b) *Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_h)$.*

   On recherche les solutions de $(\mathcal{E}_h)$ développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$$

   où les a_n, $n \in \mathbb{N}$, sont des réels.

   i. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

   ii. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1.

   iii. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$ sur un voisinage de 0.

4. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$(1+t^2)\, y''(t) + 4\,t\,y'(t) + 2\,y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

On cherche à résoudre $(\mathcal{E})$ en appliquant la méthode de variation des constantes du préambule, i.e. en recherchant la solution sous la forme :

$$t \mapsto y(t) = \frac{\lambda(t)}{1+t^2} + \frac{t\,\mu(t)}{1+t^2}$$

où λ et μ sont deux fonctions inconnues, à déterminer.

(a) Donner la condition vérifiée pour tout réel t par $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$.

(b) Montrer que, pour tout réel t :

$$\begin{cases} \lambda'(t) &= -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

(c) Exprimer, pour tout réel t, $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

(d) En déduire l'expression de la solution générale de $(\mathcal{E})$.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\varphi(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1-2t}{1+t^2}\,dt,\ \psi(n) = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Donner, pour tout entier naturel non nul n, l'expression de $\varphi(n)$ en fonction de n.

2. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre p en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ pour une fonction g de classe C^p sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $2p$ en 0, et en déduire celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ à l'ordre $2p+1$ en 0.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et préciser la valeur de cette constante.

5. Déterminer un réel α tel que, pour n assez grand :

$$\left|\cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\ln n\right) - \frac{\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{\beta}{n^4}$$

où β est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

6. Quelle est la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n>0} \cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\ln n\right)\right)$?

7. Quelle est la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n>0} \cos\left(\varphi(n)\right)\right)$?

Partie III

Pour tout réel x, on pose : $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Montrer que Φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer : $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$.

   (b) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x)$.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :
   $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_X^Y \{\Phi(t+a) - \Phi(t+b)\}\, dt = \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a)\, dt - \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a)\, dt$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists Y_0 \in \mathbb{R} : t \geq Y_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) - \ell| \leq \varepsilon$.

5. En déduire que, pour tout $Y \geq Y_0$: $\left| \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a)\, dt - (b-a)\,\ell \right| \leq (b-a)\,\varepsilon$.

6. Montrer que : $\exists X_0 \in \mathbb{R} : t \leq X_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) + \ell| \leq \varepsilon$.

7. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \{\Phi(t+a) - \Phi(t+b)\}\, dt$?

8. (a) Montrer que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+ : \int_0^X \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt = \int_X^{X+1} \Phi(t)\, dt - \int_0^1 \Phi(t)\, dt$$

   (b) Montrer que :

$$\int_0^1 \Phi(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

   (c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists X_1 \in \mathbb{R}^+ : t \geq X_1 \Rightarrow |\Phi(t) - \ell| \leq \varepsilon$$

   (d) Que vaut $\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt$?

9. Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$\frac{1}{(k+2)^2+1} \leq \int_k^{k+1} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt \leq \frac{1}{k^2+1}$$

10. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt$$

11. En déduire un encadrement de $\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt$ entre deux sommes de séries.

Ce problème propose, tout d'abord, la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre par différentes méthodes : méthode de variation des constantes, intégration directe, recherche de solutions développables en série entière. La solution fait intervenir la fonction Arctangente, qui est étudiée dans les parties suivantes.

♦

EPREUVE DE MATHEMATIQUES C

♦

I. REMARQUES GENERALES

Le sujet présentait, dans un premier temps, la méthode de variation des constantes pour une équation différentielle linéaire du second ordre.
Les techniques classiques de résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre étaient ensuite passées en revue, pour une équation donnée.
L'étude d'une des fonctions mises en jeu donnait enfin lieu à deux parties portant sur les séries numériques, intégrales à paramètres, et intégrales impropres.

Dans l'ensemble, le sujet a été bien compris par les candidats.

Nous avons toutefois les remarques suivantes :

1. Les noms des théorèmes usuels ne sont pas toujours connus, et bien souvent confondus : Cauchy-Schwarz n'a rien à voir avec Cauchy-Lipschitz … L'apostrophe de « D'Alembert » fait parfois défaut … quand on ne trouve pas « Hadamard » …

2. Certains candidats s'avèrent incapables d'effectuer correctement un produit matrice-vecteur.

3. Ce n'est pas parce que le terme général d'une série tend vers zéro que celle-ci converge …

4. Les développements en série entière des fonctions usuelles ne sont pas toujours connus ($t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, $t \mapsto \cos t$, etc …)

5. La notion de fonction affine n'est pas connue de tous les candidats. En outre, une fonction dont la dérivée vaut 1 n'est, en aucun cas, constante.

6. La formule de Taylor-Young ne semble être connue que par moins de 50 % des candidats … On trouve, comme réponses, un peu de tout, même des formules avec des coefficients binomiaux.

7. Les notions de continuité, de limite, et croissance d'une fonction sont souvent confondues, mélangées et utilisées indépendamment de façon abusive dans des raisonnements complètement faux.

8. Parler de « fonction convergente » ne veut rien dire.

9. Beaucoup de candidats justifient de façon incorrecte le fait que la valeur absolue d'une intégrale soit inférieure à l'intégrale de la valeur absolue de l'intégrande. Nous rappelons également que l'on n'intègre pas à l'intérieur d'une valeur absolue.

10. Un certain nombre de candidats citent « le critère de l'ordre », inconnu à nos yeux.

11. Certains candidats nous donnent « des valeurs approchées de la réponse » …

12. Certains candidats font un usage abusif, dans leurs copies, d'abréviations : « cv », « cpm », « c0m », etc …

13. Et même s'il s'agit d'une épreuve de Mathématiques, nous insistons sur l'orthographe qui, elle aussi, fait parfois cruellement défaut (ce qui est encore plus choquant lorsque sont en jeu des termes mathématiques : « intervalle » notamment …)

14. Enfin, tout calcul se doit d'être présenté de façon correcte et logique ; voici ce que nous avons trouvé, dans certaines copies :

$$calcul \quad = \quad *****$$
$$\times\times\times\times \quad = \quad \ldots\ldots\ldots$$

et il fallait comprendre :

$$calcul = \quad *****\times\times\times\times \quad = \quad \ldots\ldots\ldots$$

Une très grande importance a, comme les années précédentes, été accordée à la rigueur des raisonnements, et à la qualité de la présentation.

II. REMARQUES PARTICULIERES

Préambule

Globalement, cette partie a été correctement traitée. On déplore toutefois la lourdeur de certains calculs pour la question 3. : certains candidats avaient parfois jusqu'à 3 pages de calculs, souvent compliqués à l'extrême, et pas toujours très clairs ni rigoureux.

Première partie

1. Cette question a, le plus souvent, été correctement traitée.
Ceci dit, un nombre non négligeable de candidats obtiennent des rayons de convergence qui dépendent de *t*, ou sont négatifs, voire imaginaires égaux à *i* …

2. Certains candidats ne savent pas résoudre cette équation différentielle … D'autres proposent une méthode de résolution très compliquée. Quand ils ne veulent pas recourir à l'équation caractéristique !

3. La question 3. a. *i*., en général, été correctement traitée. Par contre, ce n'est pas le cas du 3. a. *ii*. : peu de candidats pensent à vérifier l'indépendance des deux solutions, ou tout simplement, pensent à signaler que les fonctions de la base sont bien des solutions. … Certains utilisent la réciproque du résultat du 3. *a*. *i*. sans la justifier. Enfin, on trouve parfois la notation très abusive « $\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$ » SIC.

Pour la question b., elle a, en général, été correctement traitée jusqu'en ii., mais beaucoup moins de candidats obtiennent l'expression simplifiée attendue en *iii*.

Toutefois, un certain nombre de candidats donnent une expression de a_{n+2} non simplifiée, ce qui ne leur permet donc pas d'obtenir les réponses de *ii*. et *iii*.

Enfin, certains candidats veulent utiliser à tout prix une équation caractéristique de degré 2, alors même que les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas constants.

4. Cette question a, en général, été correctement traitée.

Deuxième partie

1. Cette question a, en général, été correctement traitée.

2. Cette question a été relativement peu traitée correctement ! Il s'agit pourtant d'une question de cours, avec des points facilement gagnables …
Bien souvent le « $o\left((x-x_0)^p\right)$ » est oublié, ou on trouve à la place « $o\left(x^p\right)$ », quand ce n'est pas « $o\left(f^p\right)$ ».
A cet effet, nous rappelons aux candidats que la notation, pour une dérivée d'ordre p, est « $f^{(p)}$ », et non « f^p ».
Plusieurs candidats, qui se souviennent un peu mieux de leur cours, confondent Taylor-Young et Taylor avec reste intégral

3. Cette question a été un peu plus traitée que la précédente, et traduit le fait que certains candidats ont du mal à retenir des formules sous l'aspect « formel ». Toutefois, un nombre non négligeable de candidats donne, comme réponse, un polynôme sans les « *o* » , traduisant ainsi une incompréhension totale de la notion de développement limité : on approxime une fonction par un polynôme, mais la fonction n'est pas égale à ce polynôme !!!!!
Enfin, un nombre non négligeable de candidats n'a pas prêté attention au fait que le premier développement limité demandé était à l'ordre « 2 *p* » et non « *n* » ni « *p* » …

4. Cette question a, en général, été correctement traitée.

5. Cette question a été beaucoup moins bien traitée que la précédente.

6. Cette question a, en général, été correctement traitée.
Elle met en évidence une certaine confusion entre la notion de limite et celle d'équivalent. Certains candidats écrivent que « $\cos\left(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln n\right) \rightarrow \frac{\alpha}{n^2}$ » **SIC** et que, donc, « la série converge » !!!! **SIC**
Par ailleurs l'inégalité triangulaire est trop souvent mal assimilée. On trouve, ainsi, par exemple

$$\text{« } \left|\cos\left(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln n\right)\right| \leq \frac{\beta}{n^4} - \frac{|\alpha|}{n^2} \text{ » } \textbf{SIC}$$

ou encore

$$\text{« } \cos\left(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln n\right) \leq \frac{\beta}{n^4} + \frac{\alpha}{n^2} \text{ » } \textbf{SIC}$$

que, donc, « la série converge » !!!! **SIC**

7. Peu de candidats ont traité cette question.

Troisième partie

1. Curieusement, cette question n’a pas toujours été correctement traitée. La notion de continuité ne semble pas bien assimilée.

Très peu de candidats rappellent que pour une fonction continue *f*, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de *f*, et est donc dérivable et continue. En revanche, de nombreux candidats établissent la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et en concluent que la fonction est bien définie et continue.

2. Cette question a, en général, été correctement traitée.

3. On déplore, pour cette question, des calculs effroyablement compliqués et peu clairs.
D’autre part, il y a des confusions pour intégrer la fonction Φ, qui était elle même définie via une intégrale. Cela amène par exemple

« $\int_X^Y \Phi(t)\,dt \mapsto \int_X^Y \frac{dt}{1+t^2}$ » SIC

4, 5. La question 4 est, en général, correctement traitée, mais ce n’est pas du tout le cas de la question 5 : un certain nombre de candidats intègrent à l’intérieur de la valeur absolue …

6. Cette question a, en général, été correctement traitée.

7. Cette question a été traitée correctement par peu de candidats.
Certains candidats n'hésitent pas à décomposer l’intégrale impropre d’une somme comme somme d’intégrales impropres …

8. a. b. sont, en général, correctement traitées, mais ce n’est pas le cas de c. et d.

9., 10. Ces questions n’ont été traitées correctement que par peu de candidats.

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d’assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L’utilisation d’un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l’utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.

Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

11PT30

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

A rendre avec la copie 2 feuilles de papier millimétré

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique)

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$:

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

c. Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq n_0} f(n)\right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

I. Première partie

1. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).
Pour $t \geq e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

b. Etudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$.

d. Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2} \right)$?

2. Pour $t \geq e$, on considère la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de g sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $g'(t)$.

b. Etudier les variations de g sur $[e, +\infty[$

c. Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[e, +\infty[$.

d. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} g(t)\, dt$ est-elle convergente ?

e. Que peut-on déduire du *d.* pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2(\ln n)^2} \right)$?

3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

a. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, dt$.

b. On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$
Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

c. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $u_n \geq \dfrac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

e. Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{u_n}{\ln n} + \dfrac{\ln n}{2} \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, et conclure sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

4. On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$, définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

b. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).

On notera ℓ sa limite.

c. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \right)$?

Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du *b*.

d. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right) = \ell - 1$.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\gamma_n - \ell = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$.

f. Soit ε un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geq n_0$:

$$\left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

g. Montrer que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

h. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(H_n - \ln n - \ell - \frac{1}{2n} \right)$.

II. Deuxième partie

Soient h et β deux réels, avec $h > 0$.

1. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t^h (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

2. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$: $0 < \dfrac{1}{t^h (\ln t)^\beta} < 1$.

3. On pose, dans ce qui suit : $\alpha = 1 + 2h$. Déduire du 2. que, pour $t \geq t_0$:

$$0 < \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}} .$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est-elle convergente ?

5. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)$?

III. Troisième partie

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par : $v_n = 1 - \dfrac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)}$.

a. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - \dfrac{\left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)}{\ln n}}$,

c. Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left| v_n - \dfrac{a}{n^2 \ln n} \right| \leq \dfrac{b}{n^2 (\ln n)^2}$.

où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Que peut-on en déduire pour la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 2} v_n \right)$?

Les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ sont appelées Séries de Bertrand (la série harmonique $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right)$ est un cas particulier). Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.

FIN DE L'EPREUVE

♦

EPREUVE DE MATHEMATIQUES C

♦

I. REMARQUES GENERALES

Le sujet traitait des intégrales et séries de Bertrand, et faisait donc appel aux connaissances des candidats sur les études de fonctions, suites, séries, intégrales, et calculs de limites.

Dans l'ensemble, le sujet a été bien compris par les candidats et le jury a apprécié leur capacité à entrer rapidement dans la logique de l'énoncé.

Par rapport à l'an passé, les candidats ont fait un effort très notable de présentation des copies, effort qui a été récompensé. On regrette, à côté, une tendance générale à écrire une avalanche d'arguments pour démontrer un résultat, le soin étant laissé au correcteur de piocher et trouver le bon, lorsque celui-ci y figure.

Par contre, un nombre non négligeable de copies témoigne toujours d'un manque de maîtrise en techniques classiques d'analyse de classe préparatoire (manipulation d'équivalents et limites, calculs d'intégrales, abus de récurrences où la démonstration de l'hérédité n'utilise pas l'hypothèse de récurrence).

Plus précisément :

1. Ce n'est pas parce qu'une fonction *f* est décroissante et/ou de limite nulle en $+\infty$ que $\int_e^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

2. Ce n'est pas parce qu'une fonction est continue qu'elle est dérivable.

3. $\frac{1}{t^2(\ln t)^2}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{t^2}$ lorsque *t* tend vers $+\infty$, et, de la même façon, $\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{t^h}$ lorsque *t* tend vers $+\infty$.

4. $(\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2$ ne peut pas être égal à $\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^2$.

5. Ce n'est pas parce qu'une suite est bornée qu'elle converge.

6. Un développement asymptotique avec des termes à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$ ne peut pas donner d'équivalent en $\frac{1}{n^2}$.

Une très grande importance a, comme les années précédentes, été accordée à la rigueur des raisonnements, et à la qualité de la présentation.

II. REMARQUES PARTICULIERES

Préliminaire

a. Beaucoup de candidats se sont contentés de l'illustration graphique, sans démontrer le résultat demandé. L'énoncé précisait pourtant que celle illustration graphique devait accompagner la démonstration.

b. Cette question a, en général, été bien traitée.

c. Cette question a aussi, en général, été bien traitée. Curieusement, quelques copies ayant correctement fait *a.* et *b*. n'ont pas traité le *c.*
Souvent, aussi, il manque l'argument fondamental selon lequel les sommes partielles, majorées, convergent, parce que la série est à termes positifs.

Première partie

1. La grande majorité des candidats a bien traité les questions *a*, *b*, *c*. Dans certaines copies, le graphe n'est pas donné, alors qu'il permettait aux candidats de gagner des points. On regrette aussi, dans beaucoup de copies, un manque de précision du tracé, lorsque le calcul de la valeur de la dérivée en e n'a pas été pris en compte.
En *d*, une grande partie des candidats a trouvé une primitive de la fonction. Souvent, les questions *e* et f sont donc correctement traitées, sauf dans quelques copies où, malgré une primitive correcte, les candidats affirment que l'intégrale diverge. Certains écrivent aussi que l'intégrale est égale à la série.

2. De même qu'en 1, la grande majorité des candidats a bien traité les questions *a*, *b*, *c*. Là encore, le graphe n'est pas toujours tracé.
En *d*, une grande partie des candidats démontre correctement la convergence de l'intégrale, mais un nombre non négligeable affirme que « $\dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ » pour obtenir la convergence. D'autres cherchent vainement une primitive.
Enfin, Le critère de comparaison est parfois mal maîtrisé, certains utilisant la majoration de $g(t)$ par $\dfrac{1}{t^2}$ pour conclure sur la convergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ sans vérifier celle de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

3. La question *a* a été traitée par la majorité des candidats. Par contre, beaucoup simplifient faussement $(\ln(n+1))^2-(\ln n)^2$ en $\left(\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)^2$.
La question *b* a été traitée aussi par une grande partie des candidats.
Pour *c*, beaucoup tentent une démonstration par récurrence, mais très peu le font correctement.
Quelques très bonnes copies ont parfaitement traité cette question.
La question *d* a été correctement traitée par les candidats ayant répondu à la question *b*.
La question *e* a été traitée par la grande majorité des candidats, même si quelques uns arrivent à en déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

4. Hormis certaines copies où certains calculent $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et trouvent une limite finie, la question *a* a été traitée par une grande partie des candidats, ce qui n'est pas le cas de la question *b*, où certains passent par des équivalents ou limites pour étudier les variations de la suite.
La question *c* n'a pas toujours été bien traitée, Cf. les remarques en début de rapport.
Beaucoup de candidats démontrent sans problème la convergence de la série,
Par contre, la majorité des candidats a bien vu la somme télescopique et la manipule sans problème.
Beaucoup montrent que la suite $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge vers zéro, et en déduisent la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\right)$, et se contentent, sans démonstration d'en déduire la convergence de la suite (γ_n).
Un certain nombre de candidats a correctement traité le *d* et le *e*, mais on trouve, dans un nombre non négligeable de copies, des manipulations avec des « $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ », etc …
La question *f* n'a été correctement traitée que par un petit nombre de candidats, par contre, la question *g* a été, en général, bien traitée.

Deuxième partie

1. Environ 50% des candidats ont traité correctement cette question.

2. Cette question a, en général, été bien traitée, mais quelques candidats se sont lancés dans des études de fonctions compliquées alors qu'il suffisait d'utiliser la définition de la limite, d'autres ont utilisé des assertions complètement fausses mélangeant équivalents, croissances comparées, etc …
En outre, certains oublient la continuité de la fonction.

3. Cette question a été correctement traitée dans presque tous les cas. Toutefois, dans un nombre non négligeable de copies, le raisonnement est outrageusement long, biscornu, très difficile à suivre, et, parfois, pas toujours lisible …

4, 5. Hormis certains candidats qui oublient de mentionner la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, ces questions ont été correctement traitées dans presque tous les cas.

Troisième partie

a. Cette question n'a pas toujours été traitée par les candidats, qui ont préféré passer directement au *b*.
Certains candidats écrivent que v_n est équivalent à 0 lorsque *n* tend vers $+\infty$.
Lorsqu'elle est traitée, c'est bien fait dans la majorité des cas, hormis pour quelques copies où on trouve des calculs n'en finissant pas (2, voire 3 pages), excessivement compliqués et difficiles à suivre, alors que le calcul de cette limite n'était pas trop compliqué.

b. Cette question a été correctement traitée dans une grande partie des copies.

c. Cette question n’a été traitée que par peu de copies. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats a bien compris le but de celle-ci, et esquissent un début de calcul et de réponse.

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d’assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Par rapport aux années passées, les correcteurs ont apprécié, de la part des candidats, une bonne compréhension du sujet dans sa globalité, et un réel effort de synthèse par rapport aux outils du programme.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
   Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.