Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème d'Algèbre linéaire

Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Dans tout le problème, nous identifierons un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$

Pour une matrice A de taille $m \times n$ quelconque, $(m, n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, on désigne par A^T sa transposée.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, leur produit scalaire s'écrit matriciellement $\langle u, v \rangle = u^T v$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Partie I

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Calculer $\langle Au, u \rangle$ en fonction de (x, y, z), puis en fonction de (x', y', z').
6. Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2$.
7. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on pose $(u, v)_A = \langle Au, v \rangle$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

On considère toujours la matrice A de la partie précédente et on fixe $b \in \mathbb{R}^3$. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle u, b \rangle.$$

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction J_b ? Que vaut $J_b(0)$?
2. Calculer le gradient de la fonction J_b, puis sa matrice Hessienne.
3. En utilisant le résultat de la question 6 de la partie I, montrer que

$$J_b(u) \geq \frac{1}{2}\lambda \|u\|^2 - \|b\| \|u\|$$

où λ désigne la plus petite valeur propre de A.

4. En déduire que la fonction J_b est minorée et non majorée (on pourra étudier la fonction qui, à tout réel t, associe $\dfrac{\lambda}{2}\,t^2 - \alpha\,t$, pour une valeur de α bien choisie).

5. Montrer que : $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leq 0$.

6. Montrer que, si $\|u\| > \dfrac{2\,\|b\|}{\lambda}$, alors : $J_b(u) \geq 0$.

7. En déduire que : $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf\limits_{u\in\bar{B}(0,r)} J_b(u)$, où $\bar{B}(0,r)$ désigne la boule fermée de centre l'origine et de rayon $r = \frac{2\|b\|}{\lambda}$.

8. Montrer que la fonction J_b admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

9. Montrer que cette fonction atteint son minimum global au point $u = A^{-1}b$.

Partie III

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$, symétrique, et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^n$ sont dits A-conjugués si $\langle Au, v\rangle = 0$.

1. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de la matrice A, rangées dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que, pour tout $i \leq n$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.

   (b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la décomposition dans la base précédente s'écrit
   $$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$
   Exprimer en fonction des α_i les quantités $\|u\|^2$ et $\langle Au, u\rangle$.

   (c) Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\langle Au, u\rangle \geq \lambda_1\,\|u\|^2$.

   (d) En déduire que pour tout vecteur u non nul, on a $\langle Au, u\rangle \neq 0$.

2. Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille de vecteurs non nuls A-conjugués deux à deux. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^n$.

3. Rappeler (sans justification) l'expression de $(\alpha M + \beta N)^T$ et $(MN)^T$ en fonction de M^T et N^T, où M, N sont des matrices de taille quelconque (mais telles que les opérations sont bien définies) et α, β sont des nombres réels.

4. Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (que l'on identifie avec une matrice colonne), préciser la taille des matrices $v^T v$ et $v\,v^T$ (on identifiera les matrices carrées de taille 1 et les nombres réels).

5. Montrer que pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^n$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a $\langle Bu, v\rangle = \langle u, B^T v\rangle$.

6. On définit pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ les matrices suivantes :

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i\, v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle} \quad , \quad D_k = I_n - C_k A$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

   (a) Montrer que les matrices C_k sont symétriques pour $1 \leq k \leq n$.

   (b) Montrer que, pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$, on a, pour $1 \leq k \leq n$,

$$C_k A w = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i.$$

   (c) En déduire que pour $0 \leq j \leq k-1$, on a : $C_k A v_j = v_j$. (On rappelle que les v_i sont A-conjugués 2 à 2).

   (d) En déduire que pour $0 \leq j \leq k-1 \leq n$: $D_k v_j = 0$ et $D_k^T A v_j = 0$.

   (e) On a donc, pour tout $0 \leq j \leq n-1$, $D_n v_j = 0$. Pourquoi peut-on en déduire que $D_n = 0$? Que vaut alors C_n ?

Exercice de Probabilités

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0, 1[$.

Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.

Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.

2. Déterminer la loi du couple (N, X).

3. On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par : $\forall\, x \in]-1, 1[:\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$
   Donner l'expression de la dérivée $k^{i\grave{e}me}$ de f pour tout $k \geq 0$.
   En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.

4. En déduire que la loi de X est donnée par

$$\forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}\cdot$$

5. Soit $\lambda \in]0, 1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.

   (a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).

   (c) Calculer la variance de Y.

6. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Comme l'année précédente, cette épreuve était découpée en un problème d'algèbre linéaire et un exercice de probabilités. Elle s'est révélée très classante, certains candidats, excellents, traitant la quasi-totalité des questions de façon adéquate alors que beaucoup d'autres n'ont abordé que les quelques questions faciles relevant pratiquement de la question de cours.

Reconnaissons tout de suite notre erreur en demandant la matrice hessienne d'une fonction de trois variables, ce qui est officiellement hors programme. Fort heureusement, cette question n'était pas utile pour la suite et n'a pas bloqué les candidats. Il a par ailleurs été tenu compte de cette erreur dans la notation, afin de ne pas pénaliser les candidats ne connaissant pas cette notion dans un cadre général.

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème traitait de la minimisation d'une forme quadratique (définie positive) sur $\mathbb{R}^3$, et de sa résolution (dans un cadre général) par la méthode du gradient conjugué. Détaillons question par question les remarques à faire sur ce probème.

Partie I

Il s'agissait ici de réduire une matrice carrée à coefficents réels, symétrique, définie positive, et d'étudier la forme quadratique associée.

Q1. Le fait qu'une matrice symétrique réelle soit diagonalisable est totalement intégré pour la plus grande partie des candidats, la justification de l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres l'est beaucoup moins (beaucoup semblent affirmer qu'une matrice diagonalisable est toujours diagonalisable dans une b.o.n.).

Q2. Malgré de trop nombreuses erreurs de calcul, le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice est assimilé. Pour ceux qui se trompent dans les calculs, il convient d'éviter les réponses aberrantes, telles qu'obtenir le vecteur nul comme unique vecteur propre, ou encore d'obtenir un seul sous-espace propre de dimension 1, alors qu'on a dit juste avant que la matrice était diagonalisable.

Q3. La grande majorité des candidats calculent le déterminant (parfois avec des erreurs) pour répondre à cette question. Les valeurs propres obtenues à la question précédentes suffisaient pour conclure immédiatement. Regrettons la confusion pour un certain nombre de candidats entre « inversible », et « diagonalisable ».

Q4. Que de formules de changement de base écrites à l'envers !

Q5. La première partie de la question a été bien traitée, mais l'écriture de la forme quadratique dans la base de diagonalisation a été catastrophique, beaucoup se lançant dans des calculs inextricables. Ceci montre que beaucoup de candidats maîtrisent les techniques de diagonalisation d'une matrice, mais n'ont aucune idée de l'utilité d'une telle réduction.

Q6,Q7. Deux questions très mal traitées, beaucoup de candidats affirmant certaines inégalités ou implications de façon péremptoire sans aucune justification, à la limite de la malhonnêteté.

Partie II

Nous cherchions à minimiser la forme quadratique

$$J_b(u) = \frac{1}{2} < Au, u > - < u, b >$$

où A est la matrice étudiée dans la première partie et b est un vecteur fixé.

Q1. Cette question a été loin d'être inutile, et a bien mis en évidence que certains candidats manipulent des objets sans avoir conscience de leur nature (scalaires, vecteurs, matrices... tout cela n'est que symboles sans aucune autre réalité). Cette réflexion sur la nature des objets permettrait d'éviter bon nombre d'erreurs.

Q2. La notion de gradient est connue de beaucoup de candidats, nous ne ferons pas de remarque sur la matrice hessienne.

Q3. Que d'inégalités de Cauchy-Schwarz écrites dans le mauvais sens ! Tout cela pour obtenir le bon résultat en soustrayant les inégalités termes à termes (sic). Là encore, un peu d'honnêteté ferait du bien, et un minimum de maitrise sur la manipulation d'inégalités serait souhaitable.

Q4. Cette question a en général été bien traitée.

Q5. Que d'erreurs de raisonnement ! La minoration précédente ne permettait en aucun cas de conclure. Ce n'est pas parce que $x^2 > -1$ que son minimum est négatif !

Q6. Cette question a été relativement bien traitée, même si on pourrait espérer plus de rigueur dans la manipulation des inégalités (arguments de croissance de fonctions, de multiplication par des termes positifs, ...).

Q7,Q8,Q9. Ces questions ont été très peu traitées de façon satisfaisante. Ainsi, beaucoup de candidats pensent qu'un infimum est toujours atteint et l'argument (attendu) pour les fonctions continues sur un fermé borné n'est apparu que sur de très rares copies. Visiblement beaucoup passent à côté du problème et ne comprennent pas vraiment la portée de ce résultat.

Partie III

Nous nous plaçons maintenant dans un cadre général et étudions l'algorithme du gradient conjugué qui permet de calcul numérique de l'inverse d'une matrice symétrique définie positive en au plus n étapes.

Q1. Nous ne savons plus comment l'écrire, alors essayons en gras : **IL FAUT ARRETER D'ELEVER DES VECTEURS AU CARRE ET DE LES MULTIPLIER ENTRE EUX**. Une fois cet axiome assimilé, on pourra alors envisager de faire du calcul vectoriel.

Q2. La notion de famille libre n'est pas assimilée, la majorité des candidats se contentant de dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux voire non nuls.

Q3. Une question de cours visiblement maîtrisée.

Q4. Une autre question de cours déjà un peu moins bien assimilée sur la multiplication de matrices rectangulaires.

Q5,Q6. Des manipulations sur les matrices relativement bien traitées par beaucoup de candidats. Rappelons toutefois que le produit matriciel n'est pas commutatif. Seul l'argument final a été très souvent escamoté : en effet, $Dv = 0$ n'implique pas que l'un des termes est nul ! ! Cela prouve bien que la notion de noyau d'une application linéaire ou d'une matrice reste une notion très abstraite.

Exercice de probabilités

Notons tout d'abord un réel progrès en probabilités par rapport à l'année dernière. Les manipulations élémentaires semblent maintenant maîtrisées par un certain nombre de candidats, même s'il ne faut pas aborder des notions trop compliquées encore.

Q1. Les lois géométriques et binomiales obtenues respectivement comme premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et comme nombre de succès dans un nombre n d'épreuves de Bernoulli indépendantes sont reconnues par beaucoup de candidats. Regrettons cependant l'apparition fréquentes de sommes dans la formule de la loi binomiale.

Q2. Là encore, la formule de Bayes apparaît de la bonne façon assez souvent, même si les indices ne sont pas forcément les bons, ce qui aboutit à une formule finale fausse.

Q3. Beaucoup d'erreurs de calcul dans le calcul des dérivées.

Q4. La formule des probabilités totales est connue, mais bien peu de candidats arrivent au bout des calculs, la plupart ne reconnaisant pas la série obtenue à la question précédente.

Q5. L'argument d'indépendance pour le calcul de l'espérance apparaît très souvent (peut être pas encore assez), mais les valeurs de ces espérances pour des lois pourtant usuelles sont très souvent farfelues. Le calcul de la loi de Y a en revanche posé beaucoup de problèmes, et l'on voit très souvent des absurdités telles que

$$P(UV = k) = P(U = k)P(V = k).$$

Quel sens cela peut-il avoir ?

Q6. Cette question, qui nécessitait d'avoir répondu correctement à la précédente, a été très peu traitée.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème d'Algèbre linéaire

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. (a) Calculer $f(e_1)$, $f^2(e_1)$.
   (b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.
2. Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
5. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Partie II

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$.

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geq 0 & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = Vect(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que
   $$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$

(c) On note $E'_x = Vect(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

(d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.

5. Montrer que la famille $(Id, \hat{f}, \hat{f}^2, \dots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.

6. (a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que $k < p$,

$$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\hat{f}^{p-1}(x_k).$$

(b) En déduire que l'on a

$$\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0 Id = 0.$$

Partie III

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note λ_i $(1 \leq i \leq p)$ les valeurs propres réelles deux à deux distinctes de f, et E_i les sous-espaces propres associés. On suppose que f est diagonalisable.

1. Soit x un vecteur non nul de E.

(a) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_i \in E_i$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

Cette décomposition est-elle unique ?

(b) Notons q le nombre de vecteurs x_i non nuls dans la décomposition précédente et supposons pour simplifier que ce sont les q premiers. Montrer que $(x_1, \dots, x_q)$ forme une famille libre.

(c) Exprimer $f^k(x)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq q-1$ en fonction des $(x_i, 1 \leq i \leq q)$.

(d) Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ tels que

$$\alpha_1 x + \alpha_2 f(x) + \cdots \alpha_q f^{q-1}(x) = 0.$$

Montrer que le polynôme

$$P(X) = \alpha_1 + \alpha_2 X + \cdots + \alpha_q X^{q-1}$$

admet $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ comme racines.

(e) Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre.

(f) Montrer que $E_x = Vect(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ puis que $E_x = Vect(x_1, \dots, x_p)$.

2. Soit F un sous-espace stable par f. On note $F_i = F \cap E_i$. Soit $x \in F$. On décompose x comme précédemment
$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$
avec $x_i \in E_i$.

   Déduire de la question précédente que $x_i \in F_i$.

3. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base canonique est donnée par
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

   (b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

   (c) Déterminer tous les sous-espaces stables par f.

Exercice de Probabilités

Soit X et Y deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant
$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i\, e^{-\lambda}\, \alpha^j\, (1-\alpha)^{i-j}}{j\,!\,(i-j)\,!} & \text{si } 0 \le j \le i \\ \\ 0 & \text{si } 0 \le i < j \end{cases}$$
où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.
5. Soient j et n deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j \mid Z = n)$.
6. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
7. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 2,2. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à 1/2 et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était cette année divisée en un problème d'algèbre linéaire et un exercice de probabilités totalement indépendants. Ce format devrait perdurer dans les années à venir.

Problème d'algèbre linéaire

La première partie de ce problème étudiait un cas particulier dans $\mathbb{R}^4$ où l'on trouvait un polynôme annulateur d'un endomorphisme (défini par sa matrice dans la base canonique) en étudiant les itérées des deux premiers vecteurs de la base. Si l'on omet les (très nombreux, presque un tiers) candidats qui élèvent des vecteurs au carré ou calculent des déterminants rectangulaires, le début de cette partie a plutôt été bien réussi : calcul de l'image d'un vecteur, relation linéaire entre vecteurs, base ... L'écriture de la matrice de l'application linéaire dans une base autre que la base canonique a en revanche déjà posé beaucoup de problèmes à la majorité des candidats.

Insistons sur le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base et qu'un corollaire de cette propriété est que, si une relation linéaire est vérifiée par les vecteurs de la base, elle l'est pour tous les vecteurs de l'espace. Cette propriété importante devait être utilisée plusieurs fois dans ce problème et semble totalement ignorée par la plupart des candidats.

Les seconde et troisième parties du problème étudiaient dans un cadre abstrait l'espace vectoriel engendré par un vecteur **fixé** et ses itérés successifs par un endomorphisme. Nous ne détaillerons pas ici les différentes questions, car nous arrivons, pour la très grande majorité des candidats dans le non-sens le plus total, art qui peut être très drôle lorsqu'il est pratiqué par un anglais mais qui ici est plutôt désolant. Ainsi, le raisonnement mathématique se résume pour beaucoup à prendre un argument au hasard parmi une liste prédéfinie, mettre “donc”, et conclure que la propriété demandée est vraie. Il n'est pas rare de voir certains candidats traiter l'intégralité de la partie II sans que le correcteur puisse trouver quelques points à donner. De grâce, privilégiez la qualité à la quantité !

Pour être plus constructif, voici quelques erreurs qui sont revenues très régulièrement et qui pourraient être facilement gommées par un étudiant qui prendrait un peu de temps pour la réflexion :

- Faites attention aux objets que vous manipulez ! Mettre des ensembles égaux à des vecteurs ou des fonctions incluses dans des ensembles dès les premières questions ne met pas le correcteur dans des dispositions particulièrement tolérantes.

- Il y a eu énormément de confusion entre les raisonnements à x fixé ou pour tout x.

- Dans le même ordre d'idée, lorsqu'un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, on ne peut pas choisir cette combinaison linéaire (elle est imposée par le vecteur lui-même). En particulier, ces coefficients ne sont pas miraculeusement ceux que l'on a obtenu dans un autre contexte à la question précédente, un argument supplémentaire est nécessaire pour une telle conclusion.

- La notion d'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs n'est pas maîtrisée. Bien souvent, on voit $y \in Vect(x_n)_{n\geq 0} \iff y = \alpha x_n$.

Fort heureusement, ce problème se terminait par un exercice de diagonalisation d'une matrice 3×3, ce que pratiquement tous les candidats maîtrisent. Cela semble être la seule compétence acquise en algèbre linéaire pour beaucoup d'entre eux.

Exercice de probabilités

Cet exercice consistait à prendre un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi était donnée et à en déduire les lois marginales, la loi de la différence, des lois conditionnelles et des questions d'indépendance de variables. L'exercice se terminait par une question de "modélisation" d'un problème réel (en lien avec les questions précédentes). Il s'agit d'un exercice très standard qui devrait être maîtrisé par tout candidat qui a fait un minimum de probabilités dans son cursus. Il s'avère que cet exercice a classé les candidats en trois catégories bien distinctes et équilibrées en nombre : ceux qui ont compris les bases du calcul des probabilités et ont réussi plutôt bien l'exercice, ceux pour qui le langage des probabilités s'apparente à on ne sait quel langage extra-terrestre, et qui écrivent n'importe quoi dès la première question (ainsi a-t-on très souvent vu $\mathbb{P}(X - Y = n) = \mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)$, ce qui permet au passage d'obtenir des probabilités négatives, certains justifiant cette formule par l'indépendance des variables X et Y pour faire plus sérieux, bien que les variables X et Y ne soient pas indépendantes) et enfin ceux qui ont l'honnêteté de ne même pas aborder l'exercice.

Les probabilités viennent de faire leur apparition dans le programme et on peut donc faire preuve d'indulgence cette année concernant ce chapitre. Cependant, elles font désormais partie à part entière du programme de mathématiques et comme précisé en préambule, un exercice de probabilités sera systématiquement présent dans les années à venir. Il convient donc de faire un gros effort de compréhension sur ce thème si l'on ne veut pas partir avec une note de base inférieure à 20 sur cette épreuve.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

098

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Partie I : Etude d'une projection orthogonale

Dans cette partie, on travaille dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le vecteur

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\imath} + \vec{k}).$$

On désigne par D la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ et F le plan vectoriel orthogonal à D.

1. On note p_D la projection orthogonale sur D et A sa matrice dans la base canonique.
   (a) Que vaut A^2 ?
   (b) Que vaut, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u} - p_D(\vec{u}), \vec{n} \rangle$?
   (c) En déduire que, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $p_D(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle\, \vec{n}$.
   (d) Calculer $p_D(\vec{n})$.
   (e) Rappeler la définition d'un vecteur propre.
   (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de p_D.
   (g) L'endomorphisme p_D est-il diagonalisable ?
   (h) Vérifier que
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
2. Reprendre les mêmes questions pour p_F, projection orthogonale sur F, et déterminer sa matrice B dans la base canonique (on pourra dans un premier temps exprimer p_F en fonction de p_D).

Partie II : Une formule de changement de base

On considère toujours l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et on reprend les notations de la partie I. Soit $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\imath} + \vec{k})$, on note D la droite engendrée par $\vec{n}$ et F le plan orthogonal à D, et on note p_D (resp. p_F) la projection orthogonale sur D (resp. sur F).

1. On pose $\vec{I} = \dfrac{p_F(\vec{k})}{\left\| p_F(\vec{k}) \right\|}$, et on définit le vecteur $\vec{J}$ de sorte que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ soit une base orthonormée indirecte de $\mathbb{R}^3$. Sans calculer les coordonnées de $\vec{I}$ et $\vec{J}$, montrer que
   $$\vec{J} \in F \cap \mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

2. On note P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$. Après avoir rappelé ce que représentent les colonnes de P, donner l'expression de P.
3. En déduire les expressions de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ en fonction de $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{n}$, puis celles de $p_F(\vec{\imath})$, $p_F(\vec{\jmath})$, $p_F(\vec{k})$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Son image par p_F a pour coordonnées (X, Y) dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ de F. Donner l'expression de X et Y en fonction de x, y et z.

Partie III : Projections orthogonales de l'hélice

On se place désormais dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère dans cet espace l'hélice circulaire (H), dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \\ z(t) = 2\sqrt{2}\,t. \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

On reprend les notations de la partie précédente : $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} + \vec{k}\right)$ *; on désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$. On note (C) l'image de (H) par la projection p.*

1. On rappelle que D est la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$, F est le plan vectoriel orthogonal à D, et p_D et p_F sont les projections orthogonales sur D et F respectivement. On définit les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ comme dans la partie précédente.
   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$ est donnée par
   $$\begin{cases} X(t) = 2t - \cos(t) \\ Y(t) = \sqrt{2}\sin(t) \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$
   (b) Montrer que tous les points de la courbe (C) sont réguliers.
   (c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Comment se déduit alors le reste de la courbe à partir de cette restriction ?
   (d) Etudier les variations de X et de Y pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Tracer sur le document-réponse joint la courbe (C) pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 3\pi\right]$. La courbe devra être tracée à l'échelle 1.

Tournez la page S.V.P.

Partie IV : Caractérisations des projecteurs orthogonaux

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle projecteur un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$.

1. Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$, montrer que
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \qquad \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|\,.$$
2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p.$$
   (b) Montrer que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
3. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|\,.$$
   (a) Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$ et $\vec{y} \in \operatorname{Ker} p$. En considérant le vecteur $\vec{u} = \vec{x} + \lambda\vec{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
   $$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2\, \|\vec{y}\|^2 + 2\lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \geq 0.$$
   En déduire que $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.
   (b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(\vec{e}_i), \vec{x}\rangle \vec{e}_i.$$
   (a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En exprimant $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, montrer que, pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
   $$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle.$$
   (c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, g(\vec{y})\rangle.$$
   Montrer que $g = f^*$.
5. Soit p un projecteur orthogonal.
   (a) Montrer que, pour tous $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle p(\vec{x}), p(\vec{y})\rangle$.
   (b) En déduire que $p = p^*$.
6. Soit p un projecteur.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} p^* \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
   (b) Soit $\vec{y} \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{x} - p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = 0$.
   En déduire que $\vec{y} = p^*(\vec{y})$ puis que $(\operatorname{Ker} p)^\perp \subset \operatorname{Im} p^*$.
   (c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve portait sur l'étude de projecteurs orthogonaux, dans l'espace, puis dans $\mathbb{R}^n$ en général. Il s'agissait donc essentiellement d'un problème d'algèbre linéaire, mais comportant une petite partie de géométrie (formule de changement de base, étude d'une courbe paramétrée du plan).

Cette épreuve s'est révélée être assez classante, avec quelques (trop peu nombreux) candidats qui ont traité la quasi intégralité du sujet, et d'autres copies beaucoup plus faibles. En particulier, un bon tiers des candidats manipulent ces objets mathématiques sans réellement les maîtriser ni les comprendre. Ainsi, ce qu'ils écrivent ressemble de loin à des maths, mais cela n'a, bien souvent, aucun sens, avec des vecteurs égaux à des scalaires, des vecteurs élevés au carré ou encore des endomorphismes appliqués à des réels. Toutes les copies comportant de telles erreurs ont été lourdement sanctionnées.

Mentionnons les erreurs les plus fréquentes que nous avons rencontrées :

- $\rightsquigarrow$ Il n'y a pas qu'un seul vecteur propre associé à une valeur propre, mais tout un sous-espace vectoriel.
- $\rightsquigarrow$ $\langle x, a\rangle = \langle y, a\rangle$ n'implique pas $x = y$.
- $\rightsquigarrow$ Seuls les endomorphismes orthogonaux (le terme « isométrie » est peut-être plus approprié) vérifient $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$.
- $\rightsquigarrow$ Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des endomorphismes orthogonaux contrairement à ce que leur nom pourrait laisser penser.

Partie I

Cette partie étudiait une projection orthogonale particulière dans $\mathbb{R}^3$ et reprenait, si ce n'est des questions de cours, des propriétés que les candidats avaient certainement déjà vues dans leur cursus.

Les premières questions ont été relativement bien traitées (à part l'expression explicite du projecteur orthogonal).

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres a été plus délicate : bien souvent, des valeurs propres ont été trouvées (et fréquemment les bonnes), mais les candidats ne justifiaient pas qu'il n'y en avait pas d'autres, et très souvent également la valeur propre nulle était ommise. Regrettons que de nombreux candidats ne connaissent pas d'autre méthode pour obtenir les valeurs propres que de calculer la matrice associée et de dérouler la ≪ méthode usuelle ≫, alors que les questions précédentes permettaient de répondre à cette question en quelques lignes. Nous rappelons que ce concours a pour but de recruter de futurs ingénieurs capables d'utiliser à bon escient les outils théoriques à leur disposition et non des singes savants qui appliquent des recettes sans les comprendre.

Les conditions suffisantes, ou nécessaires et suffisantes de diagonalisibilité sont en général bien connues. Cependant beaucoup de candidats parlent de multiplicité des valeurs propres, alors qu'ils n'ont pas calculé le polynôme caractéristique.

Partie II

Le but de cette partie était de trouver la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers une autre base orthonormée adaptée à la projection orthogonale sur un plan, puis de l'utiliser pour obtenir une expression simple qui servira dans la partie suivante des coordonnées de la projection orthogonales d'un vecteur.

Cette partie a été plutôt bien traitée et semble être maîtrisée par beaucoup de candidats.

Partie III

Nous étudions dans cette partie la courbe obtenue par projection orthogonale d'une hélice circulaire. Il s'agissait donc de l'étude d'une courbe paramétrée du plan.

La plupart des candidats savent ce qu'est un point régulier et étudient sans problème les variations des fonctions. En revanche, la réduction de l'intervalle d'étude a posé de nombreux problèmes (certains candidats ne regardent que la parité des fonctions, ou encore la fonction $t \mapsto 2t - \cos t$ devient subitement périodique !) et les symétries/translations sont rarement bien décrites.

Précisons également que tracer une courbe ne se réduit pas à calculer quelques points particuliers et à les relier par une courbe plus ou moins lisse. Au moins, quelques tangentes sont attendues pour pouvoir obtenur une allure raisonnable de la courbe. Au final, nous n'avons vu que très peu de courbes ressemblant à celle attendue.

Partie IV

Cette dernière partie, plus théorique, donnaient des caractérisations des projecteurs orthogonaux, i.e. les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs contractants et les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints.

La première question de cette partie a clairement montré une totale incapacité de beaucoup des candidats à manipuler des inégalités, avec des raisonnements du style $x \geq y$, $x \geq 0$ alors $y \geq 0$. A moins que tous les coups soient bons pour arriver au résultat demandé... Cette remarque est également valable pour l'inégalité demandée à la question 3.

Démontrer qu'une application est un endomorphisme ne pose en général aucun problème, et la démonstration que pour un projecteur, l'image et le noyau sont en somme directe est également assez bien traitée.

En revanche, la manipulation des sommes et des produits scalaires dans la question 4 a là encore montré un manque flagrant de compréhension des objets manipulés.

La fin du problème a été traitée par trop peu de candidats pour permettre des remarques significatives.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes, à coefficients complexes. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients complexes,

Question préliminaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.
   (a) A quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.
2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.
   On dit que la suite de matrices converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $(a_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.
   (a) Montrer que si la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et si la suite de matrices $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B, alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
3. On note
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}.$$
   Calculer D^n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On demande ici une expression explicite de la limite.

5. Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que

   - $a > 0$, $b > 0$, et $c > 0$,
   - $a + b + c = 1$,
   - $\pi A = \pi$.

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.

2. Soit p un entier strictement positif.

   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que

   $$X^p = P(X)Q(X) + \alpha_p X + \beta_p.$$

   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs de X bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.

   (c) En déduire une expression de B^p.

3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III

Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.
On dit que la matrice M est ***stochastique*** si

- pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$:

$$m_{ij} \geq 0$$

- la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

Tournez la page S.V.P.

1. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice stochastique.
   Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$:
$$m_{ij} \leq 1$$

2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si X_1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.
   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| = 1$.
   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
   Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$:
$$|y_i| \leq 1$$
   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :
$$|\lambda| \leq 1$$
   (c) Montrer que toutes les valeurs propres de M sont de module inférieur à 1.

Exercice de Géométrie

Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la surface (S) d'équation paramétrique
$$\alpha yz + \beta xz + \gamma xy = 0$$
où α, β, γ sont des paramètres réels non tous nuls.

1. Quelle est la nature de (S) pour $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$?
2. De façon générale, quelle est la nature de (S) lorsque un ou deux paramètres sont nuls ?
3. Quelle est la nature de (S) lorsque $\alpha\beta\gamma \neq 0$?

4. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & -\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & -\lambda \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer qu'il existe un réel λ tel que A soit de rang 1 si et seulement si
$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2.$$

   (b) En déduire que (S) est une surface de révolution si et seulement si $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$.

5. Donner les éléments caractéristiques de la surface (S) quand $\alpha = \beta = \gamma$.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Le sujet était composé d'un problème d'algèbre linéaire (étudiant quelques propriétés des matrices stochastiques) et d'un exercice de géométrie (abordant une étude de cône), le problème d'algèbre linéaire étant lui même découpé en une question préliminaire et 3 parties indépendantes.

Question préliminaire

Nous demandions dans un premier temps de rappeler la définition (avec la formule explicite) du produit matriciel qu'il sera indispensable d'utiliser à la fin du problème. Malgré une quantité non négligeable de candidats qui ne sont toujours pas capable d'énoncer une formule (utile) issue directement du cours, cette question a été traitée de manière satisfaisante. Nous demandions ensuite de démontrer quelques résultats élémentaires sur les suites de matrices (convergence d'une somme et d'un produit). Certains candidats ont utilisé comme argument les résultats usuels de convergence pour les suites réelles (sans s'apercevoir qu'ils manipulaient des matrices), ce qui montre bien qu'ils ne sont pas du tout préparés à sortir du cadre réel (éventuellement $\mathbb{R}^d$). Plus surprenant, beaucoup de candidats ayant énoncé correctement la formule du produit matriciel dans la question précédente oublient subitement cette formule et utilisent ici le produit terme à terme !

Partie I

Cette partie étudiait une matrice stochastique de taille 3×3 fixée pour laquelle il fallait calculer la limite des itérées successives via une diagonalisation (dans $\mathbb{C}$). Il fallait ensuite relier la limite obtenue avec le vecteur propre (à gauche) associé à la valeur propre 1.

La diagonalisation d'une telle matrice semble maîtrisée par la majorité des candidats. En revanche, la limite d'une suite de nombres complexes l'est beaucoup moins et cette question a donné lieu à nombre d'arguments farfelus.

La question 4 de cette partie était délicate. Nous attendions tout d'abord des candidats qu'ils justifient la formule

$$\lim_{n\to+\infty} P\,D^n\;P^{-1} = P\,(\lim_{n\to+\infty} D^n)\,P^{-1}$$

en utilisant la question préliminaire par exemple, ce que bien peu de candidats ont fait. Le calcul des matrices P et P^{-1} était inextricable, il fallait utiliser la forme très particulière de la limite pour ne pas partir dans des calculs insurmontables.

Même si cette question était difficile pour ce concours, nous regrettons globalement que quasiment tous les candidats

i. se lancent dans les calculs sans réflexion préalable

ii. se découragent rapidement après quelques lignes de calcul.

En règle générale, nous ne demanderons jamais des calculs de plusieurs pages sans qu'une autre méthode soit envisageable ; quelques calculs simples mais néanmoins un peu longs peuvent parfois apparaître et la persévérance est alors de mise. Par exemple, la dernière question de cette partie nécessitait la résolution d'un système de trois équations linéaires ce qui semble assez élémentaire. Que d'erreurs et que de calculs non aboutis !

Nous ne redirons jamais assez l'importance de mener à bien des calculs. Les mathématiques commencent par du calcul. L'expérience montre que ceux qui savent mener correctement à bien des calculs sont beaucoup plus à l'aise, ensuite, avec l'abstraction. Nous mettrons donc, régulièrement, à l'avenir, des questions comportant des calculs dans nos sujets.

Partie II

On s'intéressait ici à une matrice stochastique de taille 2×2, à l'expression de ses puissance successives, puis à la limite de la suite ainsi construite (à l'aide de polynômes). Les calculs standards sur les polynômes ne posent pas de problèmes, mais la question 2.a, qui était juste une application directe de la formule de la division euclidienne, a donné lieu à des démonstrations vaseuses qui relèvent plus de la malhonnêteté intellectuelle que des mathématiques, et où l'âge du capitaine aurait probablement permis de conclure plus rapidement.
Dans cette partie, nous soulignons également que la justification rigoureuse de la convergence vers 0 d'une suite géométrique fait souvent défaut.

Le but de cette partie était de montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique générale étaient toutes de module inférieur à 1. Il fallait connaître la formule du produit matriciel (toute méconnaissance de cette formule était rédhibitoire pour aborder de manière satisfaisante la plupart des questions de cette partie). Soulignons également une manipulation anarchique des valeurs absolues (égalité en lieu et place de l'inégalité triangulaire, mauvaises majorations...) et beaucoup d'erreurs de raisonnement avec les inégalités (du style « $a < c$, $b < c$ donc $a < b$ »). Cette partie a été globalement très mal traitée, l'abstraction semblant inaccessible à beaucoup trop de candidats.

Exercice de géométrie

Cet exercice étudiait l'équation d'un cône avec des paramètres. On s'intéressait, dans un premier temps, aux cas de dégénérescence (union de deux plans) ; là, beaucoup d'erreurs ont été commises : confusion entre plans et droites, entre union et intersection, voire obtention de surfaces surprenantes.
La suite étudiait la nature du cône dans les autres cas. Il était ici hors de question de réduire l'équation du cône, une simple discussion sur le signe des valeurs propres de la matrice symétrique associée à la forme quadratique suffisait. Les meilleurs candidats ont été en mesure d'effectuer cette discussion mais la grande majorité préfère donner une réponse (souvent inappropriée) sans aucune justification. Nous demandions ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que le cône soit de révolution. Là encore, les bons candidats ont réussi à obtenir des points, même si les notions de condition nécessaire, condition suffisante sont souvent floues et si beaucoup de raisonnements sont incomplets. La dernière question consistait à effectuer la réduction explicite de l'équation pour des valeurs fixées des paramètres et à donner les éléments caractéristiques du cône (en l'occurrence de révolution). Nous retrouvons ici le problème de mener à bien quelques calculs simples (que d'erreurs !). La question était volontairement peu précise (éléments caractéristiques du cône), car plusieurs réponses sont possibles (axe de révolution et droite génératrice, ou bien sommet et cercle générateur) mais bien peu de candidats donnent effectivement tous les éléments caractérisant un cône.

Épreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé.
Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f),\ \ g(x) \in E_\lambda(f).$$

Partie I

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.
   Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $Vect(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.
   En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
2. Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

   $$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

   Soit u l'endomorphisme de E défini par

   $$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

   avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geq 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

   (a) Montrer que f et u commutent.

(b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

(b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4.$$

(c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.

4. On revient à un espace E général. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

(b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

(c) g est-il diagonalisable ?

(d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array}.$$

i. Vérifier que l'application φ est linéaire.

ii. Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad P(\lambda_i) = \mu_i.$$

(e) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

(b) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant les résultats de la question 4 que si une telle matrice N existe, alors,
– $Q^{-1}NQ$ est diagonale.

– Il existe deux réels α et β tels que

$$N = \alpha I_2 + \beta M$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

(c) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Partie III

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct (i, j, k). On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs u et v.

1. On considère la rotation r d'axe dirigé par le vecteur unitaire a et d'angle θ.
   (a) Rappeler l'expression générale de l'image $r(u)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à a.
   (b) Montrer que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique
   $$v = u + \lambda a$$
   avec a et u orthogonaux.
   (c) En déduire l'expression générale de l'image $r(v)$ d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère f la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$ et g la réflexion par rapport au plan d'équation $y + z = 0$.
   (a) Quelle est la nature de $f \circ g$? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique.
   (c) Les endomorphismes f et g commutent-ils ?
   (d) Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
   Montrer que cet endomorphisme est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
4. Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel strictement positif. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
   $$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(u) = u + \lambda\langle u, a\rangle a.$$
   (a) Vérifier que φ est un endomorphisme.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?
   (c) Reconnaître alors φ.

♦

EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

♦

I. REMARQUES GENERALES

Le sujet était composé d'une question préliminaire utilisée plusieurs fois au cours du problème et de trois parties totalement indépendantes.

Les copies sont plutôt propres et bien présentées, ce qui est pris en compte lors de la notation, mais les réponses manquent bien souvent de précision. Bien souvent, un argument bien précis est attendu mais celui ci est vaguement énoncé, noyé parmi d'autres arguments inutiles voire faux. Il faut vraiment faire un effort sur la concision et la précision des réponses car c'est ce qui est pris le plus en compte par la notation.

II. REMARQUES PARTICULIERES

Préliminaire

Cette question a été en général bien traitée.

PARTIE I

Cette partie traitait de la trigonalisation simultanée de 2 matrices 3×3 particulières qui commutaient. La recherche des valeurs propres et vecteurs propres est en général bien maîtrisée (il faut cependant à tout prix éviter les sous-espaces propres réduits au vecteur nul !) de même que les arguments pour dire si les matrices sont diagonalisables ou non. En revanche, la trigonalisation est souvent affirmée sans aucune justification (ce qui ne rapporte bien entendu aucun point). La dernière question dans laquelle il fallait trouver la base commune de trigonalisation était plus délicate et les arguments étaient trop souvent trop imprécis.

PARTIE II

Cette partie alternait questions théoriques et applications numériques sur des endomorphismes définis comme polynômes d'un autre endomorphisme, et leur trigonalisation dans une base commune. Dès la première question, on peut constater de graves erreurs de raisonnement, les candidats confondant souvent liberté et co-linéarité des vecteurs. Les candidats savent généralement que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres entre eux, mais bien peu sont en mesure de le démontrer. Les démonstrations du cours sont à connaître tout autant que les théorèmes ! Les méthodes mises en œuvre dans ces preuves sont bien souvent réutilisables pour d'autres démonstrations.

Mentionnons que le calcul du déterminant 5×5 a été très laborieux, de très nombreuses erreurs de calcul ont été commises et, point important, la règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3 !

Les parties théoriques ont été globalement très mal traitées, avec de mauvais arguments. Ainsi, bien souvent les candidats affirment que les images de réels deux à deux distincts par un polynôme sont deux à deux distinctes (le monôme x^2 donne un contre-exemple très simple), et peu ont vu que la question 4. d. consistait en fait à montrer la bijectivité de l'application. Là encore, l'argument le plus courant était que les λ étaient non tous nuls, leurs images ne pouvaient donc pas être nulles !

La dernière question a mis en évidence que beaucoup de candidats ne savent pas ce qu'est une matrice orthogonale, de même que le manque de synthèse : il suffisait d'appliquer les résultats précédents pour répondre en quelques lignes à la question 4.d. ii., ce qui a été très rarement le cas.

PARTIE III

Cette dernière partie étudiait des exemples d'isométries en dimension 3. Clairement, cette partie du programme n'est pas du tout assimilée. Il est pourtant assez facile de savoir que la composition de deux réflexions donne une rotation dont on connaît les éléments caractéristiques même s'ils sont plus délicats à déterminer en pratique. Ajoutons qu'un endomorphisme dont le déterminant vaut 1 n'est pas nécessairement une rotation, il convient de montrer d'abord qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal.

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d'assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
   Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les parties A et B sont très largement indépendantes. La partie C l'est totalement.

On désigne par n un entier naturel strictement supérieur à 1 et H l'un des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}_n(H)$ **l'anneau** des matrices carrées de dimension n, à coefficients dans H et on désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(H)$.

PARTIE A

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses des matrices suivantes :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.
Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c, d.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

On notera désormais $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, constitué des matrices M telles que $\det(M) = 1$.

4. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$.

PARTIE B

On désignera par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p, non nul, vérifiant $A^p = I_2$.
Pour chaque matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel q non nul tel que $A^q = I_2$, on le note $h(A)$; il est appelé ordre de la matrice A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   En déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.
2. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.
3. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres complexes, éventuellement confondues, de A.
   Montrer que λ_1 et λ_2 sont de module 1.
4. Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace, $\mathrm{Tr}(A)$, de la matrice A.
5. En déduire que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
6. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. La matrice produit CD appartient-elle à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?

   On note $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A)$ le polynôme caractéristique de la matrice A.

7. Exprimer $\chi_A(X)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\mathrm{Tr}(A)$.
8. Vérifier alors qu'il y a 10 polynômes caractéristiques possibles ; déterminer dans chacun des cas les valeurs propres de A. En utilisant alors B.3, vous excluerez 4 de ces cas.
9. Dans les six cas restants, montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et déterminer l'ordre de A.
10. En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier naturel non nul p_2 tel que :

$$\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}) \qquad A^{p_2} = I_2.$$

PARTIE C

Dans cette partie, les candidats veilleront à respecter scrupuleusement l'ordre des questions.

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie par :

$$\forall (P,\, Q) \in E \times E \qquad \varphi(P,\, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\pi_0,\, \pi_1,\, \pi_2,\, \pi_3)$ de E et une seule telle que :

$$\forall\, i \in \{0,1,2,3\} \qquad \mathrm{Vect}(\pi_0, \cdots, \pi_i) = \mathrm{Vect}(1,\, X, \cdots, X^i) \;\text{ et }\; \varphi(\pi_i,\, X^i) > 0$$

   puis déterminer les quatres polynômes $\pi_0,\, \pi_1,\, \pi_2,\, \pi_3$.

3. Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} [P(t)]^2\, dt = 1$.

   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.

   (b) Sans déterminer les réels α_i, déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.

   (c) *i.* Soient (a, b, c, d) et (a', b', c', d') deux quadruplets de réels. Montrer que :

$$|aa' + bb' + cc' + dd'| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}.$$

   ii. En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{3} [\pi_i(x)]^2}.$$

   (d) En étudiant, pour tout k de $\{0,1,2,3\}$, $\mathrm{Sup}\{\pi_k(x),\ -1 \leq x \leq 1\}$, montrer :

$$\mathrm{Sup}\{|P(x)|,\ |x| \leq 1\} \leq 2\sqrt{2}.$$

FIN DE L'EPREUVE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

REMARQUES GENERALES

Le sujet était composé de trois parties : les deux premières traitaient de matrices 2×2 à coefficients entiers et étaient largement indépendantes, la troisième était totalement indépendante des premières et étudiait un produit scalaire dans l'espace des polynômes de degré au plus 3.

Le sujet était relativement court et il est anormal que certains candidats se retrouvent dans l'incapacité de finir le problème faute de temps, ce qui dénote un problème dans leur organisation et leur gestion du temps.

Globalement, les copies sont plutôt propres et bien présentées mais la rédaction est souvent très imprécise comme nous le préciserons ensuite et les arguments principaux ne sont en général pas assez mis en évidence (car non identifiés pour beaucoup de candidats).

REMARQUES PARTICULIÈRES

PARTIE A

Cette partie étudiait les matrices 2×2 à coefficients entiers inversibles et dont l'inverse était encore à coefficients entiers. Le début de cette partie, purement calculatoire sur quelques exemples, a été en général bien traitée, la troisième question nécessitait cependant un petit raisonnement et a mis en évidence l'incapacité de la majorité des candidats à effectuer un raisonnement logique correct : utilisation abusive des équivalences, arguments faux, erreurs de raisonnement.

PARTIE B

Cette partie cherchait à déterminer toutes les matrices à coefficients entiers qui, élevées à une certaine puissance, donnaient l'identité. Cette partie était plus abstraite et a vraiment été discriminante entre les candidats.

Mentionnons tout d'abord les erreurs grossières qui ont été vues à de très nombreuses reprises :

- Le produit matriciel n'est pas commutatif, ainsi, en général $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

- Les matrices ne sont pas diagonalisables en général, même dans $\mathbb{C}$. La trigonalisation suffisait souvent pour conclure.

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Lorsque l'on parle des valeurs propres complexes d'une matrice, il ne faut pas exclure les valeurs propres réelles.

Là encore, seules les questions purement calculatoires (comme la recherche des valeurs propres de la question 8) ont été correctement traitées par beaucoup de candidats mais dès que les questions traitaient du cadre général abstrait, les erreurs de raisonnement sont nombreuses, y compris pour des questions relativement simples. Et une main suffit pour dénombrer les candidats qui ont donné le bon argument pour la diagonalisabilité pour des valeurs propres doubles.

PARTIE C

Cette dernière partie, plus simple que la précédente, a permis à certains de candidats de se rattraper malgré une partie B mal traitée. Le procédé d'orthogonalisation est souvent connu même si la mise en place pratique est parfois difficile (je ne parle pas ici d'erreurs dans des calculs un peu fastidieux). L'inégalité de Cauchy-Schwartz a été très souvent reconnue et correctement justifiée. Seule une manipulation parfois anarchique des signes somme est à regretter (carré d'une somme égale somme des carrés par exemple).

CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d'assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre satisfaisant de bonnes, voire d'excellentes copies.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable.

2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci ainsi que la vérification de ses hypothèses.

3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée.

5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. Il s'agit là d'un point très important dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.

6. Il faut maîtriser les techniques de base du calcul.

7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être prêts le jour du concours.