Programme de colle 1

Classe de PT

Semaine du lundi 5 au vendredi 9 septembre

Liste des questions de cours
• Expression de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. • Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible. • Démonstration du théorème de Cesàro.

1 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

2 Combinatoire

- Soit $f : E \to F$. Si Card $E =$ Card $F < \infty$, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.
- **Formule du binôme**, $\binom{n}{k}$.
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

3 Groupes, anneaux, corps

- Caractérisation d'un sous-groupe et d'un sous-anneau, définion d'un corps.
- Morphismes de groupes et d'anneaux.

Pas d'exercices d'algèbre pure, mais des exercices faisant intervenir les suites, les fonctions trigonométriques (pour définir la loi du groupe par exemple), ou des groupes de matrices.

4 Résolution de systèmes

Révisions de PTSI.

Programme de colle 2 Semaine du lundi 12 au vendredi 16 septembre Classe de PT

Liste des questions de cours
• Expression de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. • Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible. • Démonstration du théorème de Cesàro. • Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$.

5 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

6 Combinatoire

- Soit $f : E \to F$. Si Card $E =$ Card $F < \infty$, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.
- **Formule du binôme**, $\binom{n}{k}$.
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

7 Groupes, anneaux, corps

- Caractérisation d'un sous-groupe et d'un sous-anneau, définion d'un corps.
- Morphismes de groupes et d'anneaux.

Pas d'exercices d'algèbre pure, mais des exercices faisant intervenir les suites, les fonctions trigonométriques (pour définir la loi du groupe par exemple), ou des groupes de matrices.

8 $\mathbb{R}$ et les suites réelles

8.1 $\mathbb{R}$

Inégalités triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz (dans $\mathbb{R}^n$).

8.2 Convergence d'une suite

Définition de la convergence (avec des ε).

8.3 Situations classiques

- **Suite et série géométrique** : limites, expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Suites monotones bornées.
- Sommes de Riemann

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$).

Les suites récurrentes linéaires ne sont pas au programme de cette semaine.

8.4 Relations de comparaison

Grand O, petit o, équivalents.

Programme de colle 3 Semaine du lundi 19 au vendredi 23 septembre Classe de PT

Liste des questions de cours
• Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$; équivalent de $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. • Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$. • Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$. • Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, Arctan (x)), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

9 $\mathbb{R}$ et les suites réelles

9.1 Situations classiques

- **Suite et série géométrique** : limites, expression de $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Suites monotones bornées.
- Sommes de Riemann

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$).
Les suites récurrentes linéaires ne sont pas au programme de cette semaine.

9.2 Relations de comparaison

Grand O, petit o, équivalents.

9.3 Séries numériques

Révisions de PTSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.
Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : $\leqslant$, grand O, petit o, équivalent.

10 Fonctions d'une variable réelle

10.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle.
« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

10.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.
Théorème de la limite de la dérivée.
Programme de colle 4 Semaine du lundi 26 au vendredi 30 septembre Classe de PT

Liste des questions de cours
• Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$. • Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$. • Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}\,(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3. • Limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$. • Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

11 $\mathbb{R}$ et les suites réelles

11.1 Séries numériques

Révisions de PTSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : $\leqslant$, grand O, petit o, équivalent.

12 Fonctions d'une variable réelle

12.1 Continuité

Définition ; propriétés.
« f continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

12.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.
Théorème de la limite de la dérivée.

12.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PTSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O, petit o, équivalents.
Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;
Les DL des fonctions hyperboliques sh, ch, et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

13 Intégration

13.1 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\int_{[a,b]} |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.

13.2 Calculs des primitives

13.2.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

13.2.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

Programme de colle 5 Semaine du lundi 3 au vendredi 7 octobre Classe de PT

Liste des questions de cours
• Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3. • Limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$. • Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$. • Nature des intégrales (p) : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

14 Fonctions d'une variable réelle

14.1 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PTSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O, petit o, équivalents.
Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;
Les DL des fonctions hyperboliques sh, ch, et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

15 Intégration

15.1 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_{[a,b]} |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.

15.2 Calculs des primitives

15.2.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.2.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

15.3 Intégrales sur un intervalle quelconque

15.3.1 Intégrale convergente

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

15.3.2 Le cas des fonctions positives

15.3.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

15.3.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Programme de colle 6 Semaine du lundi 10 au vendredi 14 octobre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Nature des intégrales (p) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$
- Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.
- Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1).
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

L'étude classique de la convergence (exercices 18 ou 21, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 18) doit etre bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction, même si elle n'apparaît pas sous forme de question de cours : on étudie $|f|$ à l'aide de $\leqslant$, o ou $\sim$, on en déduit que f est intégrable, donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

16 Intégration

16.1 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.

16.2 Calculs des primitives

16.2.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

16.2.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

16.3 Intégrales sur un intervalle quelconque

16.3.1 Intégrale impropre

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

16.3.2 Le cas des fonctions positives

16.3.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

16.3.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales. Calcul approché, majoration et recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente.

16.3.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition de l'*intégrabilité* et des fonctions *intégrables*. L'intégrabilité entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.
Programme de colle 7 Semaine du lundi 17 octobre au vendredi 4 novembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.
- Soit $\alpha \in]0, 1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1).
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
- Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme (les *deux*).

L'étude classique de la convergence (exercices 18 ou 21, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 18) doit etre bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction, même si elle n'apparaît pas sous forme de question de cours : on étudie $|f|$ à l'aide de $\leqslant$, o ou $\sim$, on en déduit que f est intégrable, donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

17 Intégration

17.1 Intégrales sur un intervalle quelconque

17.1.1 Intégrale impropre

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

17.1.2 Le cas des fonctions positives

17.1.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

17.1.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales. Calcul approché, majoration et recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente.

17.1.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition de l'*intégrabilité* et des fonctions *intégrables*. L'intégrabilité entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.

17.1.6 Intégrales à paramètre

Ensemble de définition, théorème de continuité sous le signe somme, théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme.
Programme de colle 8 Semaine du lundi 7 au jeudi 10 novembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme (les *deux*).
- Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ et $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$.
- Pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\qquad \text{Ker}\,(v \circ u) = \text{Ker } u \iff \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$
- et les questions de cours de la semaine précédente.

18 Intégration

18.1 Intégrales sur un intervalle quelconque

18.1.1 Intégrales à paramètre

Ensemble de définition, théorème de continuité sous le signe somme, théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme.

19 Généralités sur les espaces vectoriels

19.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.

19.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
Théorème de la base incomplète.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i\in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

19.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
Rang d'une famille de vecteurs.
Hyperplans et systèmes.
$\boxed{\textbf{Théorème du rang}}$.
Programme de colle 9 Semaine du lundi 14 au vendredi 18 novembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ et $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$.
- Pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\qquad \text{Ker}\,(v \circ u) = \text{Ker } u \iff \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$
- Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes f qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$.

  Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.

20 Généralités sur les espaces vectoriels

20.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.

20.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
Théorème de la base incomplète.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i\in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

20.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
Rang d'une famille de vecteurs.
Hyperplans et systèmes.
Théorème du rang.

21 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage, formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires.
Matrices blocs. Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
Programme de colle 10 Semaine du lundi 21 au vendredi 25 novembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes f qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$.

  Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\mathrm{Tr}\ A$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$.
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

22 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage, formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires.
Matrices blocs. Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

23 Déterminants

23.1 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.

23.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

23.3 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.
Programme de colle 11 Semaine du lundi 28 novembre au vendredi 2 décembre Classe de PT

Liste des questions de cours
• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. • Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\mathrm{Tr}\ A$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\,(P(u))$. • Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

24 Déterminants

24.1 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.

24.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

24.3 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.

25 Réduction

25.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

25.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.
CNS de diagonalisation (3 propositions).
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).
Programme de colle 12 Semaine du lundi 5 au vendredi 9 décembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\,(P(u))$.
- Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.
- Suites récurrentes d'ordre p : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$. Solutions lorsque A possède p valeurs propres distinctes (sans preuve).
- Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable.

26 Réduction

26.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

26.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.
CNS de diagonalisation (3 propositions).
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

26.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.
Suites récurrentes linéaires dans $\mathbb{R}^n$. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (étude complète), d'ordre p (structure des solutions, savoir se ramener à de l'ordre 1), systèmes d'équations différentielles linéaire d'ordre 1.
Programme de colle 13 Semaine du lundi 12 au vendredi 16 décembre Classe de PT

Liste des questions de cours

- Suites récurrentes d'ordre p : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$. Solutions lorsque A possède p valeurs propres distinctes (sans preuve).
- Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable.
- Méthode pour déterminer l'équation de la tangente en un point régulier (équation paramétrique ; et équation cartésienne dans le cas plan $m = 2$)
- Étude locale d'une courbe plane : les quatre situations possibles, selon la parité de p et q (avec 4 dessins). Définition de p et q (sans preuves).

27 Réduction

27.1 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.
Suites récurrentes linéaires dans $\mathbb{R}^n$. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (étude complète), d'ordre p (structure des solutions, savoir se ramener à de l'ordre 1), systèmes d'équations différentielles linéaire d'ordre 1.

28 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($m = 2$ ou 3)

28.1 Topologie et continuité

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Définitions des boules, des ouverts, des fermés, des parties bornées. Définition d'un point intérieur, d'un point adhérent, d'un point extérieur. Définition de la frontière.

28.2 Fonctions d'une variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^m$

Limite, Continuité, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
Dérivation : définition, caractérisation avec des coordonnées. Formules de Leibniz pour $\varphi.f$, $<f|g>$, et $f \wedge g$. Formule de Taylor.

29 Courbes

29.1 Définition, Étude locale générale

Paramétrage, demi-tangente et tangente. Cas d'un point régulier. Équation de la tangente en un point régulier (cartésienne dans le cas plan, et paramétrique).

29.2 Courbes planes

29.2.1 Étude locale

Point singulier, définition de la tangente dans le cas singulier. Point de rebroussement, point d'inflexion. Position d'une courbe plane par rapport à la tangente (par rapport à une droite $\mathscr{D}$ passant par M_0), allure de la courbe selon p et q.

29.2.2 Branches infinies

Asymptote, branche parabolique, utilisation des développements asymptotiques.

29.2.3 Plan d'étude d'une courbe plane

Réduction du domaine d'étude, variations de x et y, étude des branches infinies (position relative), des points singuliers. Tracé : placement des asymptotes, des tangentes aux points remarquable, tracé de la courbe.

Bonnes vacances !

Programme de colle 14 Semaine du mardi 3 au vendredi 13 janvier Classe de PT

Liste des questions de cours
• Méthode pour déterminer l'équation de la tangente en un point régulier (équation paramétrique ; et équation cartésienne dans le cas plan $m = 2$) • Étude locale d'une courbe plane : les quatre situations possibles, selon la parité de p et q (avec 4 dessins). Définition de p et q (sans preuves). • Plan d'étude d'une branche infinie. • Formules de Frenet : définition de $\overrightarrow{T}$, de $\overrightarrow{N}$, de α. Formules liant $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ et $\gamma(t)$ (avec preuve).

30 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($m = 2$ ou 3)

30.1 Topologie et continuité

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Définitions des boules, des ouverts, des fermés, des parties bornées. Définition d'un point intérieur, d'un point adhérent, d'un point extérieur. Définition de la frontière.

30.2 Fonctions d'une variable réelle à valeur dans $\mathbb{R}^m$

Limite, Continuité, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
Dérivation : définition, caractérisation avec des coordonnées. Formules de Leibniz pour $\varphi.f$, $<f|g>$, et $f \wedge g$. Formule de Taylor.

31 Courbes

31.1 Définition, Étude locale générale

Paramétrage, demi-tangente et tangente. Cas d'un point régulier. Équation de la tangente en un point régulier (cartésienne dans le cas plan, et paramétrique).

31.2 Courbes planes

31.2.1 Étude locale

Point singulier, définition de la tangente dans le cas singulier. Point de rebroussement, point d'inflexion. Position d'une courbe plane par rapport à la tangente (par rapport à une droite $\mathscr{D}$ passant par M_0), allure de la courbe selon p et q.

31.2.2 Branches infinies

Asymptote, branche parabolique, utilisation des développements asymptotiques.

31.2.3 Plan d'étude d'une courbe plane

Réduction du domaine d'étude, variations de x et y, étude des branches infinies (position relative), des points singuliers. Tracé : placement des asymptotes, des tangentes aux points remarquable, tracé de la courbe.

31.3 Étude métrique des courbes

Longueur d'une courbe, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Cercle de courbure.

31.4 Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites. Développées.
Programme de colle 15 Semaine du lundi 16 au vendredi 20 janvier Classe de PT

Liste des questions de cours
• Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire. • Plan d'étude d'une branche infinie. • Formules de Frenet : définition de $\overrightarrow{T}$, de $\overrightarrow{N}$, de α. Formules liant $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ et $\gamma(t)$ (avec preuve).

32 Courbes

32.1 Définition, Étude locale générale

Paramétrage, demi-tangente et tangente. Cas d'un point régulier. Équation de la tangente en un point régulier (cartésienne dans le cas plan, et paramétrique).

32.2 Courbes planes

32.2.1 Étude locale

Point singulier, définition de la tangente dans le cas singulier. Point de rebroussement, point d'inflexion. Position d'une courbe plane par rapport à la tangente (par rapport à une droite $\mathscr{D}$ passant par M_0), allure de la courbe selon p et q.

32.2.2 Branches infinies

Asymptote, branche parabolique, utilisation des développements asymptotiques.

32.2.3 Plan d'étude d'une courbe plane

Réduction du domaine d'étude, variations de x et y, étude des branches infinies (position relative), des points singuliers. Tracé : placement des asymptotes, des tangentes aux points remarquable, tracé de la courbe.

32.3 Étude métrique des courbes

Longueur d'une courbe, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Cercle de courbure.

32.4 Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites. Développées.

Programme de colle 16 Semaine du lundi 23 au vendredi 27 janvier Classe de PT

Liste des questions de cours
• Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire. • Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls

33 Courbes

33.1 Définition, Étude locale générale

Paramétrage, demi-tangente et tangente. Cas d'un point régulier. Équation de la tangente en un point régulier (cartésienne dans le cas plan, et paramétrique).

33.2 Courbes planes

33.2.1 Étude locale

Point singulier, définition de la tangente dans le cas singulier. Point de rebroussement, point d'inflexion. Position d'une courbe plane par rapport à la tangente (par rapport à une droite $\mathscr{D}$ passant par M_0), allure de la courbe selon p et q.

33.2.2 Branches infinies

Asymptote, branche parabolique, utilisation des développements asymptotiques.

33.2.3 Plan d'étude d'une courbe plane

Réduction du domaine d'étude, variations de x et y, étude des branches infinies (position relative), des points singuliers. Tracé : placement des asymptotes, des tangentes aux points remarquable, tracé de la courbe.

33.3 Étude métrique des courbes

Longueur d'une courbe, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Cercle de courbure.

33.4 Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites. Développées.
Programme de colle 17 Semaine du lundi 30 janvier au vendredi 3 février Classe de PT

Liste des questions de cours
• Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls • Distance d'un point à un sous-espace vectoriel (avec preuve). • Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (avec preuve). • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve).

34 Algèbre bilinéaire

34.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

34.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

34.3 Isométries

Définition et valeurs propres d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Une symétrie est un endomorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme orthogonal.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.
Programme de colle 18 Semaine du lundi 6 au vendredi 10 février Classe de PT

Liste des questions de cours
• Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (avec preuve). • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve). • Plan d'étude d'une matrice 3×3 orthogonale. • Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux (avec preuve).

35 Algèbre bilinéaire

35.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

35.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

35.3 Isométries

Définition et valeurs propres d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Une symétrie est un endomorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme orthogonal.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.
Description dans le cas des dimensions 2 et 3, études pratiques. En particulier détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation de $\mathbb{R}^3$. Orientation, bases directes et indirectes.

35.4 Matrices symétriques

35.4.1 Réduction des matrices symétriques réelles

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

35.5 Coniques

Plan d'étude d'une conique donnée par une équation cartésienne. Catalogue des coniques. Paramétrage usuel, allure, branches infinies. Demi-axes.
Programme de colle 19 Semaine du lundi 13 au vendredi 17 février Classe de PT

Liste des questions de cours
• Plan d'étude d'une matrice 3×3 orthogonale. • Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux (avec preuve) • Énoncé et preuve du lemme d'Abel. • Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve. • Rayon et somme de $\sum \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$. • Rayon de $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

36 Algèbre bilinéaire

36.1 Isométries

Description dans le cas des dimensions 2 et 3, études pratiques. En particulier détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation de $\mathbb{R}^3$. Orientation, bases directes et indirectes.

36.2 Matrices symétriques

36.2.1 Réduction des matrices symétriques réelles

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

36.3 Coniques

Plan d'étude d'une conique donnée par une équation cartésienne. Catalogue des coniques. Paramétrage usuel, allure, branches infinies. Demi-axes.

37 Séries numériques

Révisions (PTSI et début d'année) : Convergence absolue ; théorèmes de comparaison ($\leqslant$, o, $\sim$) ; comparaison série / intégrale ; développement décimal d'un nombre réel.

37.1 Compléments

Critère de D'Alembert. Produit de Cauchy.

38 Séries entières

38.1 Variable complexe

38.1.1 Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières. Comparaison des coefficients ($\leqslant$, $\sim$).

38.1.2 Séries géométrique et exponentielle

Développement de $\dfrac{1}{1-z}$, exponentielle complexe.

38.2 Variable réelle

Continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme. Caractère $\mathscr{C}^\infty$. Expression des coefficients.
Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

38.3 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$e^x, \quad \mathrm{ch}\,(x), \quad \mathrm{sh}\,(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Liste des questions de cours

- Énoncé et preuve du lemme d'Abel.
- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.
- Rayon et somme de $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$.
- Rayon de $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.
- L'application $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$. L'application $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $(0, 0) \mapsto 0$ est continue en $(0, 0)$.

39 Séries numériques

Révisions (PTSI et début d'année) : Convergence absolue ; théorèmes de comparaison ($\leqslant$, o, $\sim$) ; comparaison série / intégrale ; développement décimal d'un nombre réel.

39.1 Compléments

Critère de D'Alembert. Produit de Cauchy.

40 Séries entières

40.1 Variable complexe

40.1.1 Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières. Comparaison des coefficients ($\leqslant$, $\sim$).

40.1.2 Séries géométrique et exponentielle

Développement de $\frac{1}{1-z}$, exponentielle complexe.

40.2 Variable réelle

Continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme. Caractère $\mathscr{C}^\infty$. Expression des coefficients.
Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

40.3 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$e^x, \quad \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

41 Fonctions de plusieurs variables

41.1 Limite et continuité

Limite en un point adhérent.
Fonctions continues de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$, opérations algébriques, composition. L'image d'un fermé borné par une application continue est fermé borné (cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: bornée et atteint ses bornes).

41.2 Calcul différentiel

Dérivées partielles, applications $\mathscr{C}^1$, formule de Taylor à l'ordre 1. Formule de composition, applications aux EDP. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: Gradient (∇).
Dérivées partielles d'ordre supérieur, théorème de Schwarz. EDP d'ordre 2, avec changement de variable (donné).
Fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert dans $\mathbb{R}$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Étude des extrema locaux : points critiques, hessienne, nature lorsque la hessienne est inversible via l'étude des valeurs propres.
Programme de colle 21 Semaine du lundi 13 au vendredi 17 mars Classe de PT

Liste des questions de cours
• L'application $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$. L'application $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ et $(0,0) \mapsto 0$ est continue en $(0,0)$. • Points réguliers de $x(x^2+y^2) - x^2 + y^2 = 0$. Équation de la tangente en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. • Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée $(u,v) \mapsto \overrightarrow{F}(u,v)$, d'une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$. Vecteur tangent à une courbe définie par deux équations cartésiennes (énoncés).

42 Fonctions de plusieurs variables

42.1 Limite et continuité

Limite en un point adhérent.
Fonctions continues de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$, opérations algébriques, composition. L'image d'un fermé borné par une application continue est fermé borné (cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: bornée et atteint ses bornes).

42.2 Calcul différentiel

Dérivées partielles, applications $\mathscr{C}^1$, formule de Taylor à l'ordre 1. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: Gradient (∇).
Formule de composition, applications aux EDP.
Dérivées partielles d'ordre supérieur, théorème de Schwarz. EDP d'ordre 2, avec changement de variable (donné).
Fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert dans $\mathbb{R}$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Étude des extrema locaux : points critiques, hessienne, nature lorsque la hessienne est inversible via l'étude des valeurs propres.

42.3 Courbes du plan définies par une équation cartésienne

Point régulier, équation de la tangente en un point régulier. Cas des lignes de niveau $f(x,y) = \lambda$.

43 Surfaces

43.1 Généralités

43.1.1 Définitions

Définition d'une surface à l'aide d'une équation paramétrique ou cartésienne. Recherche d'équation cartésienne. Courbe tracée sur une surface.
Définition et équation du plan tangent dans les cas paramétrique et cartésien. Droite tangente à une courbe tracée sur une surface.

43.1.2 Courbes comme intersection de deux surfaces

Condition suffisante d'existence, tangente.
Programme de colle 22 Semaine du lundi 20 au vendredi 24 mars Classe de PT

Liste des questions de cours
• Points réguliers de $x(x^2+y^2)-x^2+y^2=0$. Équation de la tangente en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. • Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée $(u,v)\mapsto \overrightarrow{F}(u,v)$, d'une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$. Vecteur tangent à une courbe définie par deux équations cartésiennes (énoncés). • Équation paramétrique du conoïde Σ : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y=1$. La surface Σ est l'union des droites passant par un point de $\mathscr{C}$ et son projeté sur (Oz). • Équation paramétrique d'une surface réglée donnée par ses génératrices, d'une surface de révolution autour de l'axe (Oz) (énoncés). Équation cartésienne d'une surface de révolution (théorème sur la condition d'élimination).

44 Surfaces

44.1 Généralités

44.1.1 Définitions

Définition d'une surface à l'aide d'une équation paramétrique ou cartésienne. Recherche d'équation cartésienne. Courbe tracée sur une surface.
Définition et équation du plan tangent dans les cas paramétrique et cartésien. Droite tangente à une courbe tracée sur une surface.

44.1.2 Courbes comme intersection de deux surfaces

Condition suffisante d'existence, tangente.

44.2 Surfaces usuelles

44.2.1 Surfaces d'équation $z=g(x,y)$

Plan tangent. Si g est de classe $\mathscr{C}^2$, position par rapport au plan tangent en un point critique.

44.2.2 Surfaces réglées

Définition géométrique, équation paramétrique. Le plan tangent en un point contient les génératrices passant par ce point.

44.2.3 Surfaces de révolution

Définition géométrique, équations paramétrique et cartésienne d'une surface de révolution. Méridienne, parallèle. Savoir reconnaître une surface (donnée par son équation cartésienne) de révolution lorsque l'axe de révolution est un axe de coordonnées.
Programme de colle 23 Semaine du lundi 27 au vendredi 31 mars Classe de PT

Liste des questions de cours

- Équation paramétrique du conoïde Σ : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y=1$. La surface Σ est l'union des droites passant par un point de $\mathscr{C}$ et son projeté sur (Oz).
- Équation paramétrique d'une surface réglée donnée par ses génératrices, d'une surface de révolution autour de l'axe (Oz) (énoncés). Équation cartésienne d'une surface de révolution (théorème sur la condition d'élimination).
- La loi de Poisson, définie sur les $\{k\}$ et étendue à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ par $\forall A \in \mathscr{A}\ P(A) = \sum_{k\in A} P(\{k\})$, définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.
- Formule des probabilités totales, avec preuve.
- (loi conditionnelle) Une grenouille pond desoeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre d'oeufs éclot.

45 Surfaces

45.1 Généralités

45.1.1 Définitions

Définition d'une surface à l'aide d'une équation paramétrique ou cartésienne. Recherche d'équation cartésienne. Courbe tracée sur une surface.
Définition et équation du plan tangent dans les cas paramétrique et cartésien. Droite tangente à une courbe tracée sur une surface.

45.1.2 Courbes comme intersection de deux surfaces

Condition suffisante d'existence, tangente.

45.2 Surfaces usuelles

45.2.1 Surfaces d'équation $z = g(x,y)$

Plan tangent. Si g est de classe $\mathscr{C}^2$, position par rapport au plan tangent en un point critique.

45.2.2 Surfaces réglées

Définition géométrique, équation paramétrique. Le plan tangent en un point contient les génératrices passant par ce point.

45.2.3 Surfaces de révolution

Définition géométrique, équations paramétrique et cartésienne d'une surface de révolution. Méridienne, parallèle. Savoir reconnaître une surface (donnée par son équation cartésienne) de révolution lorsque l'axe de révolution est un axe de coordonnées.

46 Probabilités

46.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non, $\forall$, $\exists$). Définition d'un ensemble dénombrable, $\mathbb{Z}$ est dénombrable, un produit cartésien d'ensemble dénombrable est dénombrable. Tribus.

46.2 Probabilités

46.2.1 Généralités

Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Vocabulaire : univers, événement, événements incompatibles, système complet d'événements ; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance, $P(A \cup B)$, continuité croissante et décroissante, sous-additivité.
Lois géométrique et de Poisson sur $\mathbb{N}$.

46.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.
Programme de colle 24 Semaine du lundi 3 au vendredi 7 avril Classe de PT

Liste des questions de cours
• (loi conditionnelle) Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot. • (loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne. • Si X est une variable aléatoire discrète réelle, $V(X) = 0$ entraîne X constante presque sûrement (preuve : y compris le lemme). • Séries génératrice d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de géométrique, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi Poisson. Avec preuve.

47 Probabilités

47.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non, $\forall$, $\exists$). Définition d'un ensemble dénombrable, $\mathbb{Z}$ est dénombrable, un produit cartésien d'ensemble dénombrable est dénombrable. Tribus.

47.2 Probabilités

47.2.1 Généralités

Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Vocabulaire : univers, événement, événements incompatibles, système complet d'événements ; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance, $P(A \cup B)$, continuité croissante et décroissante, sous-additivité.
Lois géométrique et de Poisson sur $\mathbb{N}$.

47.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

47.3 Variables aléatoires discrètes

47.3.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application.
Fonction de répartition.

47.3.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.

47.3.3 Moments : espérance, variance

Variable aléatoire discrète d'espérance finie. Théorème du transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance (sous réserve d'existence). Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.
Variance, propriétés.
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

47.3.4 Couple : covariance

Covariance, coefficient de corrélation. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.

47.3.5 Séries génératrices

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.
Liens entre série génératrice et espérance, variance, et loi de la variable aléatoire.
Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

47.4 Lois usuelles

Lois uniforme, de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, géométrique $\mathscr{G}(p)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
Espérance, variance et série génératrice dans chacun des cas.
La loi géométrique est la loi sans mémoire.
Loi faible des grands nombres.
Programme de colle 25 Semaine du lundi 10 au vendredi 14 avril Classe de PT

Liste des questions de cours
• (loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne. • Séries génératrice d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de géométrique, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi Poisson. Avec preuve. • Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme (les *deux*). • Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\,(P(u))$.

48 Probabilités

48.1 Variables aléatoires discrètes

48.1.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application.
Fonction de répartition.

48.1.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.

48.1.3 Moments : espérance, variance

Variable aléatoire discrète d'espérance finie. Théorème du transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance (sous réserve d'existence). Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.
Variance, propriétés.
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

48.1.4 Couple : covariance

Covariance, coefficient de corrélation. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.

48.1.5 Séries génératrices

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.
Liens entre série génératrice et espérance, variance, et loi de la variable aléatoire.
Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

48.2 Lois usuelles

Lois uniforme, de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, géométrique $\mathscr{G}(p)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
Espérance, variance et série génératrice dans chacun des cas.
La loi géométrique est la loi sans mémoire.
Loi faible des grands nombres.

49 Équations différentielles linéaires

49.1 Équations différentielles scalaires d'ordre 1 et 2

Équations d'ordre 1, d'ordre 2 à coefficients constants : révision de première année.
Équation d'ordre 2 à coefficients non constants : théorème de Cauchy, structure de l'espace des solutions, méthode de résolution.

49.2 Systèmes à coefficient constant

Méthode de résolution : révision. Comportement asymptotique des solutions en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable.