

Programme de colle 3

Classe de PT

Semaine du lundi 19 au vendredi 23 septembre

Liste des questions de cours

- Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$; équivalent de $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.
- Soit I est un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
- Les dix DL usuels : famille exponentielle (\exp, \cos, \sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 \mathbb{R} et les suites réelles

1.1 Situations classiques

- **Suite et série géométrique** : limites, expression de $\sum_{k=0}^n q^k$.
- Suites monotones bornées.
- Sommes de Riemann.
- Suites récurrentes linéaires.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$).

1.2 Relations de comparaison

Grand O, petit o, équivalents.

1.3 Séries numériques

Révisions de PTSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : \leq , grand O, petit o, équivalent.

2 Fonctions d'une variable réelle

2.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle.

« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

2.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.
Théorème de la limite de la dérivée.