

Programme de colle 18

Classe de PT

Semaine du lundi 6 au vendredi 10 février

Liste des questions de cours

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve).
- Plan d'étude d'une matrice 3×3 orthogonale.
- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux (avec preuve).
- Énoncé et preuve du lemme d'Abel.
- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.
- Rayon de $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} z^{2n}$.
- Rayon de $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Isométries

Définition et valeurs propres d'une isométrie. Groupe $\mathcal{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable. Une symétrie est un endomorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme orthogonal. Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Description dans le cas des dimensions 2 et 3, études pratiques. En particulier détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation de \mathbb{R}^3 . Orientation, bases directes et indirectes.

1.2 Matrices symétriques

1.2.1 Réduction des matrices symétriques réelles

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

1.3 Coniques

Plan d'étude d'une conique donnée par une équation cartésienne. Catalogue des coniques. Paramétrage usuel, allure, branches infinies. Demi-axes.

2 Séries numériques

Révisions (PTSI et début d'année) : Convergence absolue ; théorèmes de comparaison (\leq , o , \sim) ; comparaison série / intégrale ; développement décimal d'un nombre réel.

2.1 Compléments

Critère de D'Alembert. Produit de Cauchy.

3 Séries entières

3.1 Variable complexe

3.1.1 Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
Comparaison des coefficients (\leq , \sim).

3.1.2 Séries géométrique et exponentielle

Développement de $\frac{1}{1-z}$, exponentielle complexe.

3.2 Variable réelle

Continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme. Caractère \mathcal{C}^∞ .
Expression des coefficients.
Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

3.3 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$e^x, \quad \text{ch}(x), \quad \text{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.