

Programme de colle 16

Classe de PT

Semaine du lundi 23 au vendredi 27 janvier

Liste des questions de cours

- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire.
- Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
- Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls
- Distance d'un point à un sous-espace vectoriel (avec preuve).
- Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\|$.

1 Courbes

1.1 Définition, Étude locale générale

Paramétrage, demi-tangente et tangente. Cas d'un point régulier. Équation de la tangente en un point régulier (cartésienne dans le cas plan, et paramétrique).

1.2 Courbes planes

1.2.1 Étude locale

Point singulier, définition de la tangente dans le cas singulier. Point de rebroussement, point d'inflexion. Position d'une courbe plane par rapport à la tangente (par rapport à une droite \mathcal{D} passant par M_0), allure de la courbe selon p et q .

1.2.2 Branches infinies

Asymptote, branche parabolique, utilisation des développements asymptotiques.

1.2.3 Plan d'étude d'une courbe plane

Réduction du domaine d'étude, variations de x et y , étude des branches infinies (position relative), des points singuliers. Tracé : placement des asymptotes, des tangentes aux points remarquable, tracé de la courbe.

1.3 Étude métrique des courbes

Longueur d'une courbe, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Cercle de courbure.

1.4 Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites. Développées.

2 Algèbre bilinéaire

2.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

2.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.