

Planche 18

Soit $P(X) = X^3 - X + 1$ et a, b, c ses 3 racines.

- 1) On suppose $a=b$ racine de $P(X)$ de multiplicité 2.
donc $a=b$ est également racine de $P'(X)$.

$$P'(X) = 3X^2 - 1$$

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Or } P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \neq 0 \text{ absurde!}$$

donc $a \neq b \Rightarrow$ a, b, c sont 3 racines distinctes.

- 2) a, b, c , 3 racines distinctes de $P(X)$

$\Rightarrow P(X)$ est scindé à 3 racines simples donc on a les relations

entre coefficients et racines:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ac = -1 \\ abc = -1 \end{cases}$$

Soit $S_n = a^n + b^n + c^n \quad 0 \leq n \leq 3$

$$n=0: S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = \underline{3}$$

$$n=1: S_1 = a + b + c = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} n=2: S_2 = a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \\ &= 0 - 2 \times (-1) = \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3: S_3 = a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)^3 - 6abc - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) \\ &= 0 - 3a(ab+bc+ac) - 3b(ab+bc+ac) - 3c(ac+cb) \\ &= 3a + 3b - 3c(-1-ab) \\ &= 3(a+b+c) + 3abc \\ &= \underline{-3} \end{aligned}$$