2011, ENSAM – Elève 1

1 – Tableau :

a) Déterminer les coordonnées de H

$H(x_H , y_H)$ est l'orthocentre du triangle OAM
⇔ H est le point de concourt des hauteurs du triangle.
Soit $M(x,y)$ / $x^2 + y^2 = 1$ car $M \in \mathcal{C}(O,1)$.

Soit $H_1 \in [OA]$ le pied de la hauteur issue de M.
On a alors OA orthogonal à MH

- ⇨ $\underset{OA}{\rightarrow}.\underset{MH}{\longrightarrow} = 0$
- ⇨ $\binom{1}{0}.\binom{x_H - x}{y_H - y} = 0$
- ⇨ $x_H = x$

Soit $H_2 \in [MA]$ le pied de la hauteur issue de O.
On a alors OH orthogonal à AM

- ⇨ OH.AM=0
- ⇨ $(x_H , y_H) .(x-1,y)=0$
- ⇨ $y_H = x_H.(1-x)/y$; pour tout $y \neq 0$

donc, **les coordonnées de H sont** $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ x.\frac{1-x}{y} \end{pmatrix}}$ **tel que $x^2 + y^2 = 1$, $y \neq 0$**.

NB : Si y=0, M et A sont confondus donc, on n'a pas d'orthocentre donc H n'existe pas.

b) Equation polaire de la courbe décrite par l'ensemble des points H

Pour tout $(x,y) \in R.R^*$, $H \begin{pmatrix} x \\ x.\frac{1-x}{y} \end{pmatrix}$ où $x^2+y^2=1$.
On a donc : $y = \sqrt{1 - x^2}$
D'où :

$$x.\frac{1-x}{y} = x.\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = x.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

donc, on a :

$$y_H = x_H.\sqrt{\frac{1-x_H}{1+x_H}}$$

On pose : $x = r.\cos(\theta)$ et $y = r.\sin(\theta)$
Donc,

$$r.\sin(\theta) = r.\cos(\theta).\sqrt{\frac{1-r.\cos(\theta)}{1+r.\cos(\theta)}}$$

Donc, si r≠0 :

⬄ $\sin(\theta)^2 = \cos(\theta)^2 . \frac{1-r.\cos(\theta)}{1+r.\cos(\theta)}$

⬄ $(1-\cos(\theta)^2).(1+r.\cos(\theta)) = \cos(\theta)^2 . (1-r.\cos(\theta))$

⬄ $1 + r.\cos(\theta) - \cos(\theta)^2 - r.\cos(\theta)^3 = \cos(\theta)^2 - r.\cos(\theta)^3$

⬄ $r.\cos(\theta) = 2.\cos(\theta)^2 - 1$

⬄ $\boxed{\boldsymbol{r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}}, \textbf{si } \boldsymbol{\theta \neq \frac{\pi}{2}}}$

c) Etudier et tracer la courbe

 # Réduction du domaine d'étude :

$r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$

donc, on peut étudier la courbe sur [-π,π].

$r(-\theta) = r(\theta)$

donc, **on peut étudier la courbe sur [0,π].**

 # Calcul de la dérivée :

$$r'(\theta) = \frac{-2.\sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$$

⬄ $r'(\theta) = \frac{-2.2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$

⬄ $r'(\theta) = \frac{(-4.\cos(\theta)^2 + 2.\cos(\theta)^2 - 1).\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

⬄ $\boxed{\boldsymbol{r'(\theta) = -(2.\cos(\theta)^2 + 1).\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}, \theta \neq \frac{\pi}{2}}}$

 # Monotonie de r :

Pour tout θ, $2\cos(\theta)^2 + 1 \geq 0$ et $\cos(\theta)^2 \geq 0$

Sur [0,π], sin(θ) > 0

Donc, $r'(\theta) \leq 0$

Donc **r est décroissante**.

 # Branches infinies :

En $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^+} r = +\infty$$

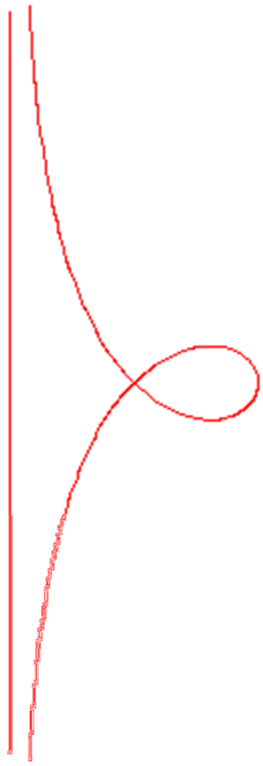
$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} r = +\infty$$

 # Tableau de variation :

$\boldsymbol{\theta}$	**0**		$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$		**π**
$\boldsymbol{r'(\theta)}$	0	-	-∞ || -∞	-	0
$\boldsymbol{r}$	1	↘	-∞ || +∞	↘	-1
$\boldsymbol{\tan(\theta) = \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}}$	0		-∞ || +∞		0

$$\boldsymbol{\frac{r'(\theta)}{r(\theta)} = -\frac{(2.\cos(\theta)^2 + 1).\sin(\theta)}{\cos(\theta)(\cos(2\theta))}}$$

Tracé de la courbe :



2 – <u>Maple</u> :