

Planche 34

1) eq : $y'' + 9y = 2 \cos x \cos(3x)$

eq₀ : $y'' + 9y = 0$

* eqc : $r^2 + 9 = 0$

$r_1 = 3i$ ou $r_2 = -3i$

donc solution de eq₀ :

$$y_0 = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

* recherche d'une solution particulière.

$$\begin{aligned} 2 \cos x \cos(3x) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{i3x} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i4x} + e^{i2x} + e^{i2x} + e^{-i4x}) \\ &= \cos 4x + \cos 2x \end{aligned}$$

* On utilise le théorème de superposition de solution

$$\Rightarrow y'' + 9y = \cos 4x$$

$$y'' + 9y = e^{i4x}$$

$$\phi(x) = a e^{i4x}$$

$$\phi'(x) = 4ai e^{i4x}$$

$$\phi''(x) = -16a e^{i4x}$$

$$-16a e^{i4x} + 9a e^{i4x} = e^{i4x}$$

$$\Rightarrow -16a + 9a = 1$$

$$a = -\frac{1}{7}$$

$$\text{donc } \phi(x) = -\frac{1}{7} e^{i4x} = -\frac{1}{7} (\cos(4x) - \frac{1}{i} \sin(4x))$$

$$y_1 = \operatorname{Re}(\phi(x)) = -\frac{1}{7} \cos 4x$$

$$\Rightarrow y'' + 9y = \cos 2x$$

on procède de la même manière que précédemment

$$y_2 = \frac{1}{5} \cos 4x$$

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2$$

$$= (1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - \frac{1}{7} \cos 4x + \frac{1}{5} \cos 2x$$