exo 15

Jean CICCIU

a) Soit $f : x \to \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

montrons que la fonction est constante égale à $\frac{\pi}{2}$

Calcul de la dérivée : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

On a montré que f est une fonction cste, donc on calcule $f(1)$ par exemple :

$f(1) = 2\,\text{arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{\pi}{2}}$

b) On étudie la fonction $g : x \to \tan x - x$

$g'(x) = \tan^2 x$ or tan est définie sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

et $g'(x) > 0 \quad \forall x \in I_k$

et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)^-} g(x) = +\infty$

g est une fonction continue et strictement croissante sur I_k, de plus $0 \in \left]\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x), \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} g(x)\right[$ donc d'après le corollaire des théorèmes des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), il existe une solution unique $x_k \in I_k$ telle que $\tan x_k = x_k$

c) On se place sur l'intervalle I_k, $\exists x_k \in I_k \quad \tan x_k = x_k \iff x_k = \text{Arctan}\, x + k\pi$

Or d'après a) $\text{Arctan}\, x_k + \text{Arctan}\, \frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2}$

donc $\boxed{x_k = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, \frac{1}{x_k} + k\pi}$

d) On a $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \underbrace{\text{Arctan}\,\frac{1}{x_k}}_{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}}$ donc lorsque $k \to +\infty$, $x_k \to +\infty$

donc $\frac{1}{x_k} \to 0$

DL en 0 de $\text{Arctan}\,\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_k} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\to \quad x_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{x_k} + o\left(\frac{1}{x_k^2}\right)$

Or on est sur I_k donc $k\pi \leq x_k \leq k\pi + \pi$

Théorème des gendarmes

$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{x_k}{k\pi} \leq 1 + \frac{1}{k}$ donc $\frac{x_k}{k\pi} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 \Rightarrow x_k \sim k\pi$

ainsi $\frac{1}{x_k} \sim \frac{1}{k\pi}$ en remplaçant on trouve

$\boxed{x_k = k\pi + \frac{1}{k\pi} + \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)}$ $\quad a = k,\ b = \frac{1}{k},\ c = 0,\ d = \frac{\pi}{2}$

2. <u>formule de Taylor Young:</u> f de classe C^n sur $]x_0 - a, x_0 + a)$

Alors il existe $\mathcal{E}$ définie sur $]a, a[$ de limite nulle en 0 tel que

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$

$+ (x - x_0)^n \mathcal{E}(x - x_0)$

<u>Théorème de Dirichlet:</u> Soit $f \in \mathcal{E}^1\mathcal{M}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x)$ existe et

$\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

<u>$\mathcal{E}^1$ par morceaux:</u> Une fonction est de classe $\mathcal{E}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ si il existe une subdivision de $[a,b]$ telle que f est de classe $\mathcal{E}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ de la subdivision et admet un prolongement de classe $\mathcal{E}^1$ sur chaque intervalle fermé $[x_k, x_{k+1}]$.