

Exercice n° 10:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = 2I_3 + D$$

$$DI_3 = I_3D = D$$

$$\Rightarrow A^n = (2I_3 + D)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k I_3 D^{n-k}$$

$$\text{or } D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } D^3 = 0_3$$

$$\Rightarrow A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} D + \frac{n(n-1)}{2} D^2 2^{n-2} I_3$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n 2^{n-1} & 2^n & 0 \\ \binom{n}{2} 2^{n-2} & n 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } f(x) = x^2 e^{2nx} \\ f'(x) = 2(x^2 + x) e^{2nx}$$

$$H_n: \exists P_n \in \mathbb{R}_2[X] / f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{2nx}$$

$$H_0: x^2 e^{2nx} = f(x), \text{ donc } H_0 \text{ est vraie}$$

$$\begin{aligned} \text{Supposons que } H_n \text{ soit vraie: } \exists P_n \in \mathbb{R}_2[X] / f^{(n)}(x) &= P_n(x) e^{2nx} \\ f^{(n+1)}(x) &= P_n'(x) e^{2nx} + 2P_n(x) e^{2nx} \\ &= P_{n+1}(x) e^{2nx} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \exists P_{n+1} \in \mathbb{R}_2[X] / f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x) e^{2nx}$$

Donc H_{n+1} vraie si H_n l'est, or H_0 l'est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}_2[X] / f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{2nx}$$

Soit ϕ l'application qui à P_n associe P_{n+1}
 et B sa matrice dans la base canonique
 de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = {}^t A$$

Donc $P_0 = x^2$
 $P_1 = 2x^2 + 2x$
 $P_2 = 4x^2 + 8x + 2$

$$\text{Donc } B^n = ({}^t A)^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & (n^2-n)2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = 2^n x^2 + n2^n x + (n^2 - n)2^{n-2}}$$

```

Ex 10
[ > P:=x->a[6]*x^6+a[5]*x^5+a[4]*x^4+a[3]*x^3+a[2]*x^2+a[1]*x+a[0];
  P:=x->a6*x^6+a5*x^5+a4*x^4+a3*x^3+a2*x^2+a1*x+a0

[ On résout les équations imposées par les coefficients de Fourier.
[ > solve((1/(2*pi))*int(P(x),x=0..2*pi)=0,1/pi*int(P(x)*cos(x),x=0..2*pi)=1,1/pi*int(P(x)*cos(2*x),x=0..2*pi)
  =1/2^6,1/pi*int(P(x)*cos(3*x),x=0..2*pi)=1/3^6,1/pi*int(P(x)*cos(4*x),x=0..2*pi)=1/4^6,1/pi*int(P(x)*cos(
  5*x),x=0..2*pi)=1/5^6,1/pi*int(P(x)*cos(6*x),x=0..2*pi)=1/6^6,1/pi*int(P(x)*sin(x),x=0..2*pi)=0,1/pi*int(
  P(x)*sin(2*x),x=0..2*pi)=0,1/pi*int(P(x)*sin(3*x),x=0..2*pi)=0,1/pi*int(P(x)*sin(4*x),x=0..2*pi)=0,1/pi*in
  t(P(x)*sin(5*x),x=0..2*pi)=0,1/pi*int(P(x)*sin(6*x),x=0..2*pi)=0));

  (a1=0,a3=0,a0=1/945*pi,a5=-1/240*pi,a2=-1/180*pi,a4=1/144*pi,a6=1/1440)

[ > A:=x->subs(a[1]=0,a[3]=0,a[0]=1/1440,P(x));
  1/144*pi^2,a[6]=1/1440,P(x));

  A:=x->subs(a1=0,a3=0,a0=1/945*pi,a5=-1/240*pi,a2=-1/180*pi,a4=1/144*pi,a6=1/1440,P(x))

[ Donc d'après le théorème de Dirichlet, comme P est dérivable sur R, puis P et P' sont continues sur R :
[ > evalf(A(0));
  1.017343063

[ vérification :
[ > evalf(sum('1/k^6','k'=1..1000));
  1.017343063

[ de plus P est continue sur R, donc d'après le théorème de Parseval :
[ > evalf(2/(2*pi)*int((A(x))^2,x=0..2*pi));
  1.000246088

[ vérification :
[ > evalf(sum('1/k^12','k'=1..1000));
  1.000246088
[ >

```