

Exercice 5 (ENSAM-OT 2010)

1) Maple

2) a) Soit A la matrice associée à f . f est de trace nulle, donc

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta\gamma \end{pmatrix} = \lambda I_2 \text{ avec } \lambda = \alpha^2 + \beta\gamma$$

Donc f^2 est une homothétie.

b) f est désormais de trace nulle et inversible, donc

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \det A \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$$

$$\text{On pose } a = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \text{ et } S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} & \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \end{pmatrix}$$

$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow s \circ s = \text{id}$ donc S est une symétrie par rapport à un espace de dimension 1 car $S \neq \pm I$

$$aS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = A \text{ donc } as = f$$

$$\begin{aligned} \text{c) } S \text{ est de type } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} = 0 \text{ et si } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = \gamma \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit e_1 tel qu'il ne soit pas vecteur propre de s :

$$s(e_1) \neq \lambda e_1$$

On pose $e_2 = s(e_1) \Rightarrow e_2 \neq \lambda e_1$ donc (e_1, e_2) est libre
 $\Rightarrow (e_1, e_2)$ est libre, de dimension 2 $\Rightarrow$ c'est une base de E .

$$\begin{aligned} \text{Or, } s(e_1) &= e_2 = 0x e_1 + 1x e_2 \text{ (d'après l'hypothèse posée)} \\ \text{et } s(e_2) &= s \circ s(e_1) = \text{id}(e_1) = e_1 = 1x e_1 + 0x e_2 \end{aligned}$$

Donc dans la base (e_1, e_2) , f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.

Exercise 5 (maple)

> with(linalg):

> A := matrix(3,3,[a,1,b,1,c,d,e,f,1]);

$$A := \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

> P := matrix(3,3,[1,1,1,1,2,1,1,1,-1]);

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

> P1 := inverse(P);

$$P1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

> multiply(P1,A,P);

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}a + 1 + \frac{1}{2}e - c + \frac{1}{2}f + \frac{3}{2}b - d & \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}e - 2c + \frac{1}{2}f + \frac{3}{2}b - d & \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}e - c + \frac{1}{2}f - \frac{3}{2}b + d \\ -a + c - b + d & -a - 1 + 2c - b + d & -a + c + b - d \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e + 1 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}b \end{bmatrix}$$

> solve({(3/2)*a + 5/2 + (1/2)*e - 2*c + f + (3/2)*b - d = 0, (3/2)*a + (1/2)*e - c + (1/2)*f - (3/2)*b + d = 0, -a + c - b + d = 0, -a + c + b - d = 0, (1/2)*a - (1/2)*e - (1/2)*f + (1/2)*b = 0, (1/2)*e + 1/2 - f + (1/2)*b = 0});

$$\{a=0, d=-2, e=-1, b=-2, f=-1, c=0\}$$

> A := matrix(3,3,[0,1,-2,1,0,-2,-1,-1,1])

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$