

Exercice 1:

1) a) Soit λ une valeur propre de A avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Alors $AX = \lambda X$ et $A^2 X = \lambda^2 X$ avec X un vecteur colonne non nul.

D'où $2A^2 = A + I_n$ donne $2\lambda^2 X - \lambda X - X = 0$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \text{car } X \neq 0$$

$$\Delta = 9$$

$$\text{Soit } \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

1) b) On effectue la division euclidienne de X^2 par $2X^2 - X - 1$, on obtient alors le quotient $P_k(X)$ et un reste $a_k X + b_k$ avec $\deg(a_k X + b_k) < \deg(2X^2 - X - 1)$

Alors, il existe deux suites réelles (a_k) et (b_k)

De plus (P_k) est une suite telle que $X^k = (2X^2 - X - 1)P_k(X) + a_k X + b_k$

$$\text{Alors } \begin{cases} 1 = a_k + b_k \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^k = -\frac{1}{2}a_k + b_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k = 1 - b_k \\ 1 - b_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^k + 2b_k \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent, } \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \\ b_k &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$1) c) A^k = (2A^2 - A - I_n)P_k(A) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)A + \frac{1}{3}I_n + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^k I_n$$

$$\text{Soit, } B = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_n$$

$$\begin{aligned}
 1) d) \quad B^2 &= \left(\frac{2}{3} A + \frac{1}{3} I_n \right)^2 \\
 &= \frac{4}{9} A^2 + \frac{1}{9} I_n + \frac{4}{9} A \\
 &= \frac{2}{9} A + \frac{2}{9} I_n + \frac{4}{9} A + \frac{1}{9} I_n \\
 &= \frac{2}{3} A + \frac{1}{3} I_n = B
 \end{aligned}$$

Alors, $B^2 = B$, par conséquent B est un projecteur.

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Ker}(B) &\Leftrightarrow \frac{2}{3} AX + \frac{1}{3} X = 0 \\
 &\Leftrightarrow AX = -\frac{1}{2} X
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(B)$ est le rep de la valeur propre $\lambda = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Im}(B) = \text{Ker}(I_n - B) &\Leftrightarrow X - \frac{2}{3} AX - \frac{1}{3} X = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} AX = -\frac{2}{3} X \\
 &\Leftrightarrow AX = X
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(B)$ est le rep de la valeur propre $\lambda = 1$.

2) Suites adjacentes: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante. Alors, ces deux suites sont dites adjacentes si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Taylor - Young: $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. Alors f admet un DL à l'ordre n en a .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{x-a}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n) \\
 f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)
 \end{aligned}$$